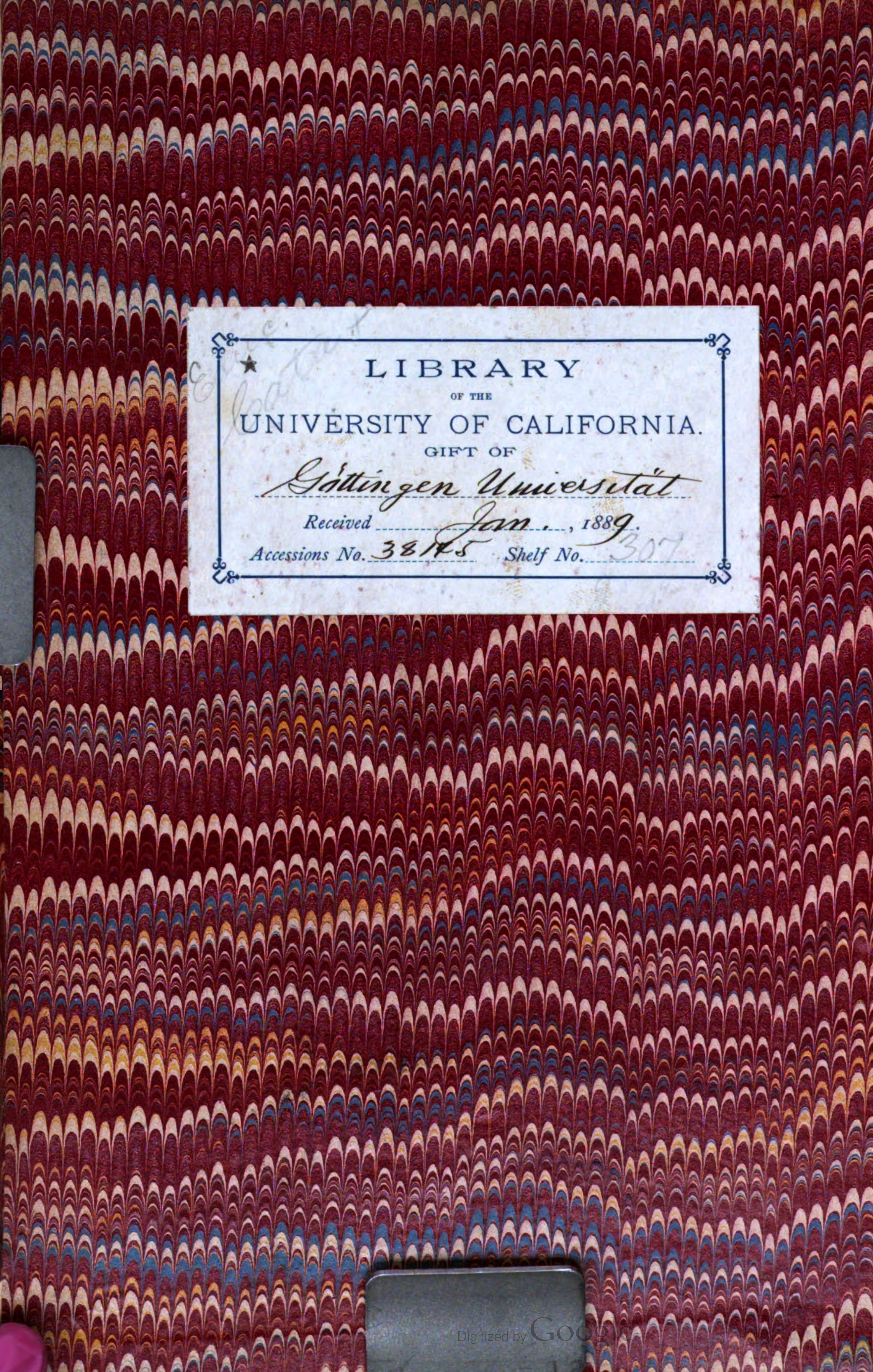



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Göttingen Universität
Received Jan., 1889.
Accessions No. 38145 Shelf No.
Digitized by Google



Bestimmung

einer speciellen Gruppe

nicht algebraischer Minimalflächen,

welche

eine Schaar von reellen algebraischen Curven enthalten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen

eingereicht von

Eduard Götting,

ord. Lehrer am Gymnasium zu Göttingen.

Göttingen 1887.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei

W. Fr. Kästner.



Einleitung.

Das allgemeine Problem der Bestimmung von nicht algebraischen Mineralflächen, welche eine Schaar von reellen algebraischen Curven enthalten, ist, nachdem bereits einzelne derartige Flächen bekannt waren, von Herrn H. A. Schwarz im 87. Bande von Crelle's Journal in der Abhandlung gestellt worden: Ueber einige nicht algebraische Mineralflächen, welche eine Schaar von algebraischen Curven enthalten. Für den Fall, daß die algebraischen Functionen, welche durch die auf der Fläche liegenden Curven und ihre sphärischen Bilder bestimmt sind, im Riemann'schen Sinne zu derselben Classe gehören, ist das erwähnte Problem in jener Abhandlung allgemein auf ein algebraisches Problem zurückgeführt worden, nämlich auf die Bestimmung dreier Functionen U, V, W des complexen Argumentes u, welche mit Ausnahme des Falles, daß ihre ersten Ableitungen, genommen nach u, rationale Functionen einer veränderlichen Größe t sind, folgende Form haben:

$$
\begin{aligned}
U &= A_1 iu + A_2 i \frac{\sigma' u}{\sigma u} + F_1(\wp u, \wp' u) \\
(1) \quad V &= B_1 iu + B_2 i \frac{\sigma' u}{\sigma u} + F_2(\wp u, \wp' u) \\
W &= C_1 iu + C_2 i \frac{\sigma' u}{\sigma u} + F_3(\wp u, \wp' u).
\end{aligned}
$$

Hier bedeuten $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$, $\wp u$, $\wp' u$ die aus der Weierstraß'schen Theorie der elliptischen Functionen bekannten Functionen. Die zu diesen Functionen gehörigen Invarianten g_2 und g_3 sollen reell sein. F_1, F_2 und F_3 bedeuten rationale Functionen ihrer Argumente $\wp u$ und $\wp' u$. A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2 endlich bedeuten reelle Constante.

Die Functionen F_1, F_2, F_3 müssen so bestimmt werden, daß U, V, W der Differentialgleichung

$$(2) \quad \left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{du}\right)^2 + \left(\frac{dW}{du}\right)^2 = 0$$

genügen.

Bezeichnet man dann mit u_1 die zu u conjugirte complexe Veränderliche, also

$$u = \xi + \eta i, \; u_1 = \xi - \eta i,$$

mit U_1, V_1, W_1 die zu U, V, W conjugirten Functionen, so sind die drei rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche der betrachteten Art den reellen Bestandteilen der drei Functionen U, V, W gleich; nämlich

$$x = \Re(U), \; y = \Re(V), \; z = \Re(W)$$

oder

$$x = \tfrac{1}{2}[U(u) + U_1(u_1)], \; y = \tfrac{1}{2}[V(u) + V_1(u_1)], \; z = \tfrac{1}{2}[W(u) + W_1(u_1)].$$

Diese Coordinaten sind dann doppeltperiodische Functionen der reellen Variabeln ξ, während die reelle Veränderliche η der Paramente der auf der Minimalfläche liegenden algebraischen Curvenschaar ist.

Sei nun n die Zahl, die angiebt, wie oft jede der Functionen U, V, W innerhalb des zu dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1$ und $2\omega_3$ der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ gehörigen Periodenparallelogramms unendlich groß wird, wenn jede Unendlichkeitsstelle so oft gezählt wird, als es die Ordnungszahl des Unendlichgroßwerdens an dieser Stelle angiebt, so sind x, y, z für jeden Wert des Parameters η doppeltperiodische Functionen im allgemeinen vom Grade $2n$. Bildet man daher den Ausdruck

$$ax + by + cz + d,$$

wo a, b, c, d reelle Constante sein sollen, so ist dies ebenfalls eine doppeltperiodische Function von ξ vom Grade $2n$; sie muß also innerhalb der Periodenparallelogramms an $2n$ Stellen verschwinden; d. h. die Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

wird für $2n$ Werte von ξ erfüllt, oder die die durch diese Gleichung dargestellte Ebene schneidet eine beliebige der algebraischen Curven $\eta =$ const. in $2n$ Punkten. Daraus folgt, daß die algebraischen Curven, welche auf der durch die Functionen U, V, W

bestimmten Minimalfläche liegen, im allgemeinen von der Ordnung $2n$ sind.

In speziellen Fällen kann sich jedoch die Ordnung der Curven auch erniedrigen, wenn nämlich etwa die Functionen U, V, W so beschaffen sind, daß mehreren Werten von ξ ein und dieselben Werte von x, y, z entsprechen; also wenn z. B. x, y, z grade Functionen von ξ sind, wie dies unter anderm für $n = 2$ eintritt.

Will man nun eine Gruppe von 3 Functionen der unter (1) angegebenen Form bestimmen, so daß sie der Differentialgleichung (2) genügen, so scheint es nach dem vorhergehenden angemessen, alle die Gruppen, für welche die Zahl n dieselbe ist, gleichzeitig zu bestimmen.

Drei Functionen U, V, W für welche $n = 1$ ist, giebt es nicht.

Ist $n = 2$, so erhält man nach Herrn H. A. Schwarz (a. a. O. Seite 160) die Minimalflächen, welche eine Schaar von Kreisen enthalten.

Der Fall, daß die Functionen U, V, W innerhalb des zu dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1$, $2\omega_3$ gehörigen Periodenparallelogramms an 4 Stellen, aber im allgemeinen von höherer als der ersten Ordnung unendlich groß werden, ist von Herrn von Lilienthal untersucht worden. (Ueber Minimalflächen, welche durch elliptische Integrale darstellbar sind. Crelle's Journal Bd. 99). Für spezielle Fälle ist die Bestimmung der Functionen U, V, W durchgeführt.

Hier sollen nun alle Functionen U, V, W bestimmt werden, für welche $n = 3$ ist. Diese werden dann Minimalflächen liefern, welche im allgemeinen eine Schaar von reellen Curven sechster Ordnung enthalten.

Die Bestimmung solcher Functionen zerfällt in 2 Teile. Im ersten Teile werden drei Functionen U, V, W bestimmt, welche innerhalb des zu dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1, 2\omega_3$ gehörigen Periodenparallelogramms von der dritten Ordnung unendlich groß werden, deren erste Ableitungen nach den unabhängigen Veränderlichen u rationale Functionen der zu dem Periodenpaare $2\omega_1$, 2ω gehörigen doppeltperiodischen Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ sind und welche der Differentialgleichung (2) genügen. Im zweiten Teile werden die in den Functionen U, V, W auftretenden Constanten so bestimmt, daß diese Functionen die unter (1) angegebene Form annehmen, d. h. daß die Coëfficienten der elliptischen Integrale erster und zweiter Art, u und $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$, rein imaginäre Werte haben. Es wird dabei von einer weiteren Untersuchung stets Abstand ge-

nommen, sobald die Ordnungszahl n sich erniedrigt oder sobald die eben erwähnten Coëfficienten von u und $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ sämmtlich verschwinden. Hieran soll sich dann noch in einem letzten Teile eine Untersuchung der wichtigsten Eigenschaften der zu den bestimmten Functionen U, V, W gehörigen Minimalflächen knüpfen, die dadurch ergänzt werden soll, daß zum Schluß die numerischen Daten angegeben werden, die zur Anfertigung der Modelle zweier speziellen dieser Flächen ausreichen.

I. Abschnitt.

§ 1. Einführung der Functionen G und H.

Um 3 Functionen U, V, W zu bestimmen, welche der Differentialgleichung (2) genügen, setze man [1])

$$(3)\quad \frac{dU}{du} = G^2 - H^2,\ \frac{dV}{du} = i(G^2 + H^2),\ \frac{dW}{du} = 2GH.$$

Bedeuten hier G und H willkürliche Functionen von u, so genügen die durch die Gleichungen (3) definirten Functionen U, V, W der Differentialgleichung (2). Gleichzeitig lassen sich durch die Functionen G und H auch die bekannten Functionen s und $\mathfrak{F}_{(s)}$ [2]) als Functionen von u bestimmen.

Da nämlich

$$x = \Re \int^u (G^2 - H^2)\, du$$

$$y = \Re \int^u (G^2 + H^2)\, du$$

$$z = \Re \int^u 2\, GH\, du$$

ist, so erhält man durch Vergleichung dieser Formeln mit denen, welche x, y, z durch s und $\mathfrak{F}_{(s)}$ definiren [3])

$$\frac{H}{G} = s,\ G^2 du = \mathfrak{F}(s)\, ds.$$

---

1) Weierstraß: Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich O ist. Monatsberichte der Berliner Akademie vom 15. Okt. 1866. Seite 616.

2) Weierstraß: a. a. O. Seite 619 oder H. A. Schwarz: Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. Crelle's Journal Bd. 80. Seite 284 und 285.

3) H. A. Schwarz: Miscellen. Seite 285.

Weil aber

$$\frac{ds}{du} = \frac{GH' - HG'}{G^2}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{G^4}{GH' - HG'}.$$

In der vorliegenden Untersuchung müssen nun G und H als Functionen der complexen Veränderlichen u so bestimmt werden, daß G^2, H^2 und GH eindeutige doppeltperiodische Functionen von u mit dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1, 2\omega_3$ sind, die zugehörigen Functionen U, V, W aber nur elliptische Integrale erster und zweiter Art enthalten und innerhalb des zu $2\omega_1, 2\omega_3$ gehörigen Periodenparallelogramms von der dritten Ordnung unendlich groß werden. Bei der Bestimmung der Functionen G und H sind dann die beiden Fälle zu unterscheiden: 1) daß die Unstetigkeitstellen der Functionen U, V, W alle drei von einander verschieden sind, und 2) daß 2 oder alle 3 Unstetigkeitsstellen zusammenfallen.

§ 2. Bestimmung der Functionen G und H, wenn die 3 Unstetigkeitstellen von einander verschieden sind.

Wenn U, V, W innerhalb des zu Grunde gelegten Periodenparallelogramms an 3 von einander verschiedenen Stellen, an jeder von der ersten Ordnung unendlich groß werden, so müssen die Functionen G^2 H^2 und GH an jeder dieser Stellen von der zweiten Ordnung unendlich groß werden, jedoch so, daß in den Reihenentwickelungen dieser Functionen für die Umgebung der Unstetigkeitsstellen kein Glied mit der negativen ersten Potenz der Veränderlichen vorkommt.

Bezeichnet man die 3 Unstetigkeitsstellen mit u_1, u_2, u_3, so läßt sich $G \cdot H$ auf die Form bringen [1])

$$(4)\quad G \cdot H = C \frac{\prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \sigma(u - v_\lambda)}{\prod_{\mu=1}^{\mu=3} \sigma^2(u - u_\mu)}$$

1) Vergl. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen von Herrn K. Weierstraß, bearbeitet von H. A. Schwarz. Art. 13. Nro. 1. Im folgenden mögen sie kurz mit „Formeln" citirt werden.

wo zwischen den Größen v_λ und u_μ die Gleichung besteht

$$(5) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=6} v_\lambda = 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=3} u_\mu.$$

Die rechte Seite der Gleichung (4) ist nun in 2 Factoren G und H zu zerlegen, sodaß die Quadrate derselben die oben angegebenen Bedingungen erfüllen; der Quotient $\frac{H}{G}$ darf jedoch keine Constante werden, da sonst die zugehörigen Minimalflächen sich auf Ebenen reduciren. Die Factorenzerlegung kann auf 3 verschiedene Arten geschehen:

$$\text{I.} \begin{cases} G^2 = C_1^2 \dfrac{\sigma^2(u-v_1)\cdot\sigma(u-v_3)\cdot\sigma(u-v_4)\cdot\sigma(u-v_5)\cdot\sigma(u-v_6)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^2(u-u_2)\cdot\sigma^2(u-u_3)}\cdot e^{mu} \\ H^2 = C_2^2 \dfrac{\sigma^2(u-v_2)\cdot\sigma(u-v_3)\cdot\sigma(u-v_4)\cdot\sigma(u-v_5)\cdot\sigma(u-v_6)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^2(u-u_2)\cdot\sigma^2(u-u_3)}\cdot e^{-mu} \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} G^2 = C_1^2 \dfrac{\sigma^2(u-v_1)\cdot\sigma^2(u-v_2)\cdot\sigma(u-v_5)\cdot\sigma(u-v_6)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^2(u-u_2)\cdot\sigma^2(u-u_3)}\cdot e^{mu} \\ H^2 = C_2^2 \dfrac{\sigma^2(u-v_3)\cdot\sigma^2(u-v_4)\cdot\sigma(u-v_5)\cdot\sigma(u-v_6)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^2(u-u_2)\cdot\sigma^2(u-u_3)}\cdot e^{-mu} \end{cases}$$

$$\text{III.} \begin{cases} G^2 = C_1^2 \dfrac{\sigma^2(u-v_1)\cdot\sigma^2(u-v_2)\cdot\sigma^2(u-v_3)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^2(u-u_2)\cdot\sigma^2(u-u_3)}\cdot e^{mu} \\ H^2 = C_2^2 \dfrac{\sigma^2(u-v_4)\cdot\sigma^2(u-v_5)\cdot\sigma^2(u-v_6)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^2(u-u_2)\cdot\sigma^2(u-u_3)}\cdot e^{-mu} \end{cases}$$

In allen drei Fällen ist

$$C_1 C_2 = C$$

und C_1, C_2 und C bedeuten 3 reelle oder complexe Constante.

Es soll nun jeder der 3 Fälle gesondert untersucht werden.

I. Damit die unter I angegebenen Functionen G^2 und H^2 doppelt periodische Functionen der Veränderlichen u mit dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1, 2\omega_3$ seien, muß zunächst folgende Gleichung erfüllt sein:

$$m = 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3$$

wo k_1 und k_3 die beiden Zahlen 0 oder 1 bedeuten, $2\eta_1$ und $2\eta_3$ aber die zu $2\omega_1$ und $2\omega_3$ gehörigen Perioden des elliptischen Integrals zweiter Art $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ sind. Die Größen v_λ und u_μ aber müssen die Gleichung befriedigen:

$$2v_1 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 2(u_1 + u_2 + u_3 + k_1\omega_1 + k_3\omega_3)$$
$$2v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 2(u_1 + u_2 + u_3 - k_1\omega_1 - k_3\omega_3).$$

Daraus folgt aber

$$v_1 - v_2 = 2(k_1\omega_1 + k_3\omega_3).$$

Der Quotient $\frac{H}{G}$ wird also eine Constante, was ausgeschlossen sein soll.

II. Wenn G^2 und H^2 die unter II angegebene Gestalt haben, so müssen, damit sie doppeltperiodische Functionen der verlangten Art, sind, folgende Gleichungen bestehen:

$$m = 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3$$

und

$$(6)\quad \begin{aligned} 2v_1 + 2v_2 + v_5 + v_6 &= 2(u_1 + u_2 + u_3 + k_1\omega_1 + k_3\omega_3) \\ 2v_3 + 2v_4 + v_5 + v_6 &= 2(u_1 + u_2 + u_3 - k_1\omega_1 - k_3\omega_3). \end{aligned}$$

Hier haben $k_1 k_3\ \eta_1 \eta_3$ dieselbe Bedeutung wie im ersten Falle. Die Größen v_5 und v_6 dürfen keiner der Größen u_μ congruent sein, weil sonst weder G^2, noch H^2, noch GH an der Stelle u_μ noch unendlich groß wird.

Dagegen darf man setzen

$$(7)\quad v_1 = v_2 = u_3.$$

Diese Annahme ist nämlich gleichbedeutend mit einer Transformation des zu Grunde gelegten Coordinatensystems, bei welcher die Z-Axe eine bestimmte Richtung erhält.

Die Gleichungen (6) ergeben dann

$$(7)\quad \begin{aligned} v_5 + v_6 &= 2(u_1 + u_2 - u_3 + k_1\omega_1 + k_3\omega_3) \\ v_3 + v_4 &= 2(u_3 - k_1\omega_1 - k_3\omega_3). \end{aligned}$$

Weil die Reihenentwickelungen der Functionen G^2, H^2 und GH für die Umgebung ihrer Unstetigkeitsstellen keine Glieder mit der negativen ersten Potenz der Veränderlichen enthalten sollen, so muß folgendes System von Gleichungen erfüllt sein

$$(9)\quad \begin{aligned} &\frac{\sigma^2(u_\lambda - v_1)\cdot\sigma^2(u_\lambda - v_2)\cdot\sigma(u_\lambda - v_5)\cdot\sigma(u_\lambda - v_6)}{\sigma^2(u_\lambda - u_\mu)\cdot\sigma^2(u_\lambda - u_\nu)}\cdot\Big[2\frac{\sigma'(u_\lambda - v_1)}{\sigma(u_\lambda - v_1)} + \\ &+ 2\frac{\sigma'(u_\lambda - v_2)}{\sigma(u_\lambda - v_2)} + \frac{\sigma'(u_\lambda - v_5)}{\sigma(u_\lambda - v_5)} + \frac{\sigma'(u_\lambda - v_6)}{\sigma(u_\lambda - v_6)} - 2\frac{\sigma'(u_\lambda - u_\mu)}{\sigma(u_\lambda - u_\mu)} \\ &- 2\frac{\sigma'(u_\lambda - u_\nu)}{\sigma(u_\lambda - u_\nu)} + 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3\Big] = 0 \end{aligned}$$

$$
(10)\quad \begin{gathered}
\frac{\sigma^2(u_\lambda - v_3)\cdot\sigma^2(u_\lambda - v_4)\cdot\sigma(u_\lambda - v_5)\cdot\sigma(u_\lambda - v_6)}{\sigma^2(u_\lambda - u_\mu)\cdot\sigma^2(u_\lambda - u_\nu)}\cdot\Big[2\frac{\sigma'(u_\lambda - v_3)}{\sigma(u_\lambda - v_3)} + \\
+2\frac{\sigma'(u_\lambda - v_4)}{\sigma(u_\lambda - v_4)} + \frac{\sigma'(u_\lambda - v_5)}{\sigma(u_\lambda - v_5)} + \frac{\sigma'(u_\lambda - v_6)}{\sigma(u_\lambda - v_6)} - 2\frac{\sigma'(u_\lambda - v_\mu)}{\sigma(u_\lambda - v_\mu)} \\
-2\frac{\sigma'(u_\lambda - v_\nu)}{\sigma(u_\lambda - v_\mu)} - 2k_1\eta_1 - 2k_3\eta_3\Big] = 0
\end{gathered}
$$

λ, μ, ν sollen hier und im folgenden die 3 Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge bedeuten.

Diejenige der Gleichungen (9) für welche $\lambda = 3$ ist, ist auf Grund der Gleichung (7) identisch erfüllt.

Aus den beiden anderen Gleichungen (9) folgt

$$
(11)\quad \left\{ \begin{gathered}
2\frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_5)}{\sigma(u_1 - v_5)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_6)}{\sigma(u_1 - v_6)} - 2\frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} \\
+2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3 = 0 \\
2\frac{\sigma'(u_2 - u_3)}{\sigma(u_2 - u_3)} + \frac{\sigma'(u_2 - v_5)}{\sigma(u_2 - v_5)} + \frac{\sigma'(u_2 - v_6)}{\sigma(u_2 - v_6)} - 2\frac{\sigma'(u_2 - u_1)}{\sigma(u_2 - u_1)} \\
+2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3 = 0.
\end{gathered} \right.
$$

Es sei nun weder v_3 noch v_4 congruent der Größe u_1, dann folgt aus der ersten der Gleichungen (10)

$$
(12)\quad \begin{gathered}
2\frac{\sigma'(u_1 - v_3)}{\sigma(u_1 - v_3)} + 2\frac{\sigma'(u_1 - v_4)}{\sigma(u_1 - v_4)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_5)}{\sigma(u_1 - v_5)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_6)}{\sigma(u_1 - v_6)} - \\
-2\frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} - \frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)} - 2k_1\eta_1 - 2k_3\eta_3 = 0.
\end{gathered}
$$

In Verbindung mit der ersten Gleichung (11) ergiebt diese Gleichung:

$$
(13)\quad \frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_4)}{\sigma(u_1 - v_4)} - 2\frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)} - 2k_1\eta_1 - 2k_3\eta_3 = 0.
$$

Man hat nur 2 Fälle zu unterscheiden:

$$
\text{(A)}\qquad k_1 = 0,\ k_3 = 0.
$$

Setzt man dann

$$
v_3 = u_3 + v,\quad v_4 = u_3 - v,
$$

wo v eine willkürliche Größe bedeutet, und setzt diese Werte in die Gleichung (13) ein, so erhält man

$$
\frac{\sigma'(u_1 - u_3 - v)}{\sigma(u_1 - u_3 - v)} + \frac{\sigma'(u_1 - u_3 + v)}{\sigma(u_1 - u_3 + v)} - 2\frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)} = 0,
$$

also [1])

$$\wp'(u_1 - u_3) = 0.$$

Sind nun v_3 und v_4 auch nicht congruent zu u_2, so folgt aus der zweiten Gleichung (10) in derselben Weise

$$\wp'(u_2 - u_3) = 0.$$

Wären aber v_3 und v_4 congruent u_2, also

$$v_3 \equiv v_4 \equiv u_2,$$

dann wäre

$$v_3 + v_4 \equiv 2u_2.$$

Es ist aber

$$v_3 + v_4 \equiv 2u_3$$

nach Gleichung (7), also ist

$$2(u_2 - u_3) \equiv 0.$$

Es ist also auch in diesem Falle $\wp'(u_2 - u_3) = 0$. Man erhält daher folgende Ausdrücke für die u_μ und v_λ

$$\begin{aligned} &u_1 = \omega_\lambda + u_3,\ u_2 = \omega_\mu + u_3 \\ (14)\quad &v_1 = u_3,\ v_2 = u_3,\ v_3 = u_3 + v,\ v_4 = u_3 - v \\ &v_5 = \omega_\lambda + \omega_\mu + u_3 + v',\ v_6 = \omega_\lambda + \omega_\mu + u_3 - v', \end{aligned}$$

wo v und v' zwei willkürliche Constante sind.

(B) Es sei $k_1\omega_1 + k_3\omega_3 = \omega_\mu$.

Dann kann man setzen

$$v_3 = u_3 - \omega_\mu + v,\quad v_4 = u_3 - \omega_\mu - v.$$

Aus der Gleichung (13) ergiebt sich dann

$$\frac{\sigma'(u_1 - u_3 + \omega_\mu - v)}{\sigma(u_1 - u_3 + \omega_\mu - v)} + \frac{\sigma'(u_1 - u_3 + \omega_\mu + v)}{\sigma(u_1 - u_3 + \omega_\mu + v)} - 2\frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)} - 2\eta_\mu = 0,$$

oder [2])

$$\frac{\wp'(u_1 - u_3)}{\wp(u_1 - u_3) - e_\mu} + \frac{\wp'(u_1 - u_3 + \omega_\mu)}{\wp(u_1 - u_3 + u_\mu) - \wp v} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\wp'(u_1 - u_3)(e_\mu - \wp v) = 0.$$

Nun darf nicht $\wp v = e_\mu$ sein, weil dann v_3 und v_4 der Größe u_3 congruent werden; also muß auch hier sein

$$\wp'(u_1 - u_3) = 0.$$

1) „Formeln". Art. 11. Nro. 2.

2) „Formeln". Art. 11. Nro. 2 und 5.

Sind nun v_3 und v_4 nicht congruent zu u_2, so ergiebt sich in derselben Weise

$$\wp'(u_2 - u_3) = 0.$$

Wären aber v_3 und v_4 congruent zu u_2, so wäre

$$v_3 + v_4 \equiv 2u_2\,,$$

also auf Grund der Gleichung (7)

$$2u_2 \equiv 2u_3 + 2\omega_\mu$$
$$2(u_2 - u_3) \equiv 2\omega_\mu\,,$$

also auch hier $\wp'(u_2 - u_3) = 0$.

Man erhält daher folgendes Wertsystem für die Null- und Unendlichkeitsstellen, wenn man wieder unter v und v' zwei willkürliche Constante versteht:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_3 + \omega_\lambda, \quad u_2 = u_3 - \omega_\mu \\ (15)\quad &v_1 = u_3, \quad v_2 = u_3, \quad v_3 = u_3 - \omega_\mu + v, \quad v_4 = u_3 - \omega_\mu - v \\ &v_5 = u_3 + \omega_\lambda + v', \quad v_6 = u_3 + \omega_\lambda - v'. \end{aligned}$$

III. Wenn G^2 und H^2 die unter III angegebene Form haben, so erhält man zunächst wieder die Gleichungen

$$\begin{aligned} &m = 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3 \\ (16)\quad &v_1 + v_2 + v_3 = u_1 + u_2 + u_3 + k_1\omega_1 + k_3\omega_3 \\ &v_4 + v_5 + v_6 = u_1 + u_2 + u_3 - k_1\omega_1 - k_3\omega_3. \end{aligned}$$

Auch hier darf man wie im II. Falle setzen

$$v_1 = v_2 = u_3,$$

dagegen darf keine der anderen Größen v congruent zu u_3 sein, weil diese Unstetigkeitsstelle sonst überhaupt fortfällt.

Bei dieser Annahme wird dann

$$v_3 = u_1 + u_2 - u_3 + k_1\omega_1 + k_3\omega_3.$$

Wie im II. Falle muß noch das folgende System von Gleichungen bestehen

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{\sigma^2(u_\lambda - v_1)\cdot\sigma^2(u_\lambda - v_2)\cdot\sigma^2(u_\lambda - v_3)}{\sigma^2(u_\lambda - u_\mu)\cdot\sigma^2(u_\lambda - u_\nu)}\left[\frac{\sigma'(u_\lambda - v_1)}{\sigma(u_\lambda - v_1)} + \frac{\sigma'(u_\lambda - v_2)}{\sigma(u_\lambda - v_2)}\right. \\ &\left. + \frac{\sigma'(u_\lambda - v_3)}{\sigma(u_\lambda - v_3)} - \frac{\sigma'(u_\lambda - u_\mu)}{\sigma(u_\lambda - u_\mu)} - \frac{\sigma'(u_\lambda - u_\nu)}{\sigma(u_\lambda - u_\nu)} + k_1\eta_1 + k_3\eta_3\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma^2(u_\lambda - v_4)\cdot\sigma^2(u_\lambda - v_5)\cdot\sigma^2(u_\lambda - v_6)}{\sigma^2(u_\lambda - u_\mu)\cdot\sigma^2(u_\lambda - u_\nu)}\Big[\frac{\sigma'(u_\lambda - v_4)}{\sigma(u_\lambda - v_4)}+\frac{\sigma'(u_\lambda - v_5)}{\sigma(u_\lambda - v_5)} \tag{18}$$
$$+\frac{\sigma'(u_\lambda - v_6)}{\sigma(u_\lambda - v_6)}-\frac{\sigma'(u_\lambda - u_\mu)}{\sigma(u_\lambda - u_\mu)}-\frac{\sigma'(u_\lambda - u_\nu)}{\sigma(u_\lambda - u_\nu)}-k_1\eta_1-k_3\eta_3\Big]=0.$$

Die Gleichung des Systems (17), für welche $\lambda = 3$ ist, ist identisch erfüllt. Die beiden andern nehmen der speziellen Werte von v_1 und v_2 wegen folgende Gestalt an

$$(19)\left\{\begin{aligned}&\frac{\sigma'(u_1 - u_3)}{\sigma(u_1 - u_3)}+\frac{\sigma'(u_1 - v_3)}{\sigma(u_1 - v_3)}-\frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)}+k_1\eta_1+k_3\eta_3 = 0\\&\frac{\sigma'(u_2 - u_3)}{\sigma(u_2 - u_3)}+\frac{\sigma'(u_2 - v_3)}{\sigma(u_2 - v_3)}-\frac{\sigma'(u_2 - u_1)}{\sigma(u_2 - u_1)}+k_1\eta_1+k_3\eta_3 = 0.\end{aligned}\right.$$

Auch hier sind wieder 2 Fälle zu unterscheiden

A. $k_1 = 0,\ k_3 = 0.$

In Folge des Wertes von v_3 ergeben dann die Gleichungen (19)

$$\frac{\sigma'(u_2 - u_3)}{\sigma(u_2 - u_3)}+\frac{\sigma'(u_3 - u_1)}{\sigma(u_3 - u_1)}+\frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} = 0,$$

woraus folgt

$$\wp'(u_2 - u_3) = \wp'(u_3 - u_1) = \wp'(u_1 - u_2).$$

Nimmt man nun an, daß diese 3 Functionen den Wert 0 haben, setzt also etwa

$$u_2 - u_3 = \omega_\lambda,\quad u_3 - u_1 = \omega_\nu,\quad v_2 - u_1 = \omega_\mu,$$

so lassen sich die 3 Größen v_4, v_5, v_6 aus den 3 Gleichungen (18) berechnen:

Die erste dieser Gleichungen ergiebt unter der Voraussetzung, daß keine der Größen v_4, v_5 und v_6 der Größe u_1 congruent ist,

$$\frac{\sigma'(u_1 - v_4)}{\sigma(u_1 - v_4)}+\frac{\sigma'(u_1 - v_5)}{\sigma(u_1 - v_5)}+\frac{\sigma'(u_1 - v_6)}{\sigma(u_1 - v_6)}+\eta_\mu+\eta_\lambda = 0.$$

Weil nun

$$u_1 = u_3 - \omega_\nu,\ u_2 = u_3 + \omega_\lambda$$

und daher

$$v_6 = 3u_3 - \omega_\nu + \omega_\lambda - v_4 - v_5$$

ist, so folgt aus obiger Gleichung

$$\frac{\sigma' w_4}{\sigma w_4}+\frac{\sigma' w_5}{\sigma w_5}-\frac{\sigma'(w_4 + w_5 + \omega_\lambda + 2\omega_\nu)}{\sigma(w_4 + w_5 + \omega_\lambda + 2\omega_\nu)}+\eta_\mu+\eta_\nu = 0,$$

wo

$$w_4 = u_3 - w_\nu - v_4, \quad w_5 = u_3 - w_\nu - v_5$$

gesetzt ist.

Hieraus ergiebt sich [1])

$$\frac{\wp' w_5 - \wp' w_4}{\wp w_5 - \wp w_4} + \frac{\wp'(w_4 + w_5)}{\wp(w_4 + w_5) - e_\lambda} = 0.$$

Es muß also w_4 congruent zu w_λ sein.

Setzt man deshalb

$$v_4 = u_3 + w_\lambda - w_\nu,$$

so wird

$$v_5 + v_6 = 2 u_3,$$

also

$$v_5 = u_3 + v$$
$$v_6 = u_3 - v,$$

wenn v eine willkürliche Constante bedeutet. Die beiden andern Gleichungen (18) werden durch diese Werte der Größen v ebenfalls erfüllt. Man erhält also:

$$(20) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_3 - \omega_\nu, \quad u_2 = u_3 + \omega_\lambda \\ v_1 &= u_3 \quad v_2 = u_3 \quad v_3 = u_3 + \omega_\lambda - \omega_\nu \\ v_4 &= u_3 + \omega_\lambda - \omega_\nu, \quad v_5 = u_3 + v, \quad v_6 = u_3 - v. \end{aligned}$$

Es würde nun noch übrig bleiben, den Fall zu erledigen, daß die drei Functionen $\wp'(u_2 - u_3)$, $\wp'(u_3 - u_1)$ und $\wp'(u_1 - u_2)$ einen von Null verschiedenen Wert haben. Zuvor jedoch möge erst der Fall erledigt werden, daß

$$\text{B.} \quad k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = \omega_u$$

ist. Die erste Gleichung (19) ergiebt dann

$$\frac{\wp'(u_1 - u_3) - \wp'(u_2 - u_1)}{\wp(u_1 - u_3) - \wp(u_2 - u_1)} = \frac{-\wp'(u_2 - u_3)}{\wp(u_2 - u_3) - e_u}.$$

Es muß also

$$u_2 - u_1 = \omega_\mu$$

sein, also

$$v_3 = 2 u_1 - u_2 + 2 \omega_\mu \, .$$

Wäre nun die Differenz $u_1 - u_3$ ebenfalls einer haben Periode ω_λ congruent, so wäre v_3 congruent zu u_3, das aber wurde aus-

---

1) „Formeln“. Art. 11. Nro. 4.

drücklich ausgeschlossen. Mau muß also annehmen, daß $\wp'(u_1 - u_3)$ von Null verschieden ist. Im Folgenden soll aber bewiesen werden, daß es dann ebensowenig, wie wenn die drei Functionen $\wp'(u_2 - u_3)$, $\wp'(u_3 - u_1)$ und $\wp'(u_1 - u_2)$ einen gleichen aber von Null verschiedenen Wert haben, Functionen G und H giebt, die den gestellten Anforderungen genügen, daß also hiermit die Bestimmung der Functionen G und H, die an drei verschiedenen Stellen unendlich werden, beendigt ist.

§ 3. Erledigung zweier Ausnahmefälle.

Um zu beweisen, daß es in den beiden Ausnahmefällen:

1) $\wp'(u_2 - u_1) = 0$, $\wp'(u_1 - u_3)$ von Null verschieden.

2) $\wp'(u_2 - u_3) = \wp'(u_3 - u_1) = \wp'(u_1 - u_2)$, wenn der gemeinschaftliche Wert dieser Größen von Null verschieden ist, es keine den gestellten Bedingungen genügende Functionen G und H giebt, erscheint es zweckmäßig, die Functionen G^2, H^2 und GH auf eine andere Form zu biegen, nämlich zu setzen:

$$(21)\quad \begin{aligned} G^2 &= a_0^2 + a_1^2\wp(u-u_1) + a_2^2\wp(u-u_2) + a_3^2\wp(u-u_3) \\ H^2 &= b_0^2 + b_1^2\wp(u-u_1) + b_2^2\wp(u-u_2) + b_3^2\wp(u-u_3) \\ GH &= c_0^2 + c_1^2\wp(u-u_1) + c_2^2\wp(u-u_2) + c_3^2\wp(u-u_3). \end{aligned}$$

wo die a b c Constante sind, welche folgende Gleichungen erfüllen müssen:

$$(22)\quad a_1^2 b_1^2 = c_1^4,\quad a_2^2 b_2^2 = c_2^4,\quad a_3^2 b_3^2 = c_3^4$$

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{12}\wp(u_1-u_2) + a_{13}\wp(u_1-u_3) + a_{01} &= 2c_1^2c_2^2\wp(u_1-u_2) + 2c_1^2c_3^2\wp(u_1-u_3) \\ &\quad + 2c_0^2c_1^2 \\ a_{12}\wp(u_2-u_1) + a_{23}\wp(u_2-u_3) + a_{02} &= 2c_1^2c_2^2\wp(u_2-u_1) + 3c_2^2c_3^2\wp(u_2-u_3) \\ &\quad + 2c_0^2c_2^2 \\ a_{13}\wp(u_3-u_1) + a_{23}\wp(u_3-u_2) + a_{03} &= 2c_1^2c_3^2\wp(u_3-u_1) + 2c_2^2c_3^2\wp(u_3-u_2) \\ &\quad + 2c_0^2c_3^2 \end{aligned} \right.$$

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{12}\wp'(u_1-u_2) + a_{13}\wp'(u_1-u_3) &= 2c_1^2c_2^2\wp'(u_1-u_2) + 2c_1^2c_3^2\wp'(u_1-u_3) \\ a_{12}\wp'(u_2-u_1) + a_{23}\wp'(u_2-u_3) &= 2c_1^2c_2^2\wp'(u_2-u_1) + 2c_2^2c_3^2\wp'(u_2-u_3) \\ a_{13}\wp'(u_3-u_1) + a_{23}\wp'(u_3-u_2) &= 2c_1^2c_3^2\wp'(u_3-u_1) + 2c_2^2c_3^2\wp'(u_3-u_2) \end{aligned} \right.$$

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{12}\wp''(u_1-u_2) + a_{13}\wp''(u_1-u_3) + 2a_0^2b_0^2 &= 2c_1^2c_2^2\wp''(u_1-u_2) \\ &\quad + 2c_1^2c_3^2\wp''(u_1-u_3) + c_0^4 \\ a_{12}\wp''(u_2-u_1) + a_{23}\wp''(u_2-u_3) + 2a_0^2b_0^2 &= 2c_1^2c_2^2\wp''(u_2-u_1) \\ &\quad + 2c_2^2c_3^2\wp''(u_2-u_3) + c_0^4 \\ a_{13}\wp''(u_3-u_1) + a_{23}\wp''(u_3-u_2) + 2a_0^2b_0^2 &= 2c_1^2c_3^2\wp''(u_3-u_1) \\ &\quad + 2c_2^2c_3^2\wp''(u_3-u_2) + c_0^4. \end{aligned} \right.$$

In diesen Gleichungen ist zur Abkürzung gesetzt

$$a_{\mu\nu} = a_\mu^2 b_\nu^2 + a_\nu^2 b_\mu^2.$$

Die Gleichungen (22) bis (25) sind aber nicht von einander unabhängig, sondern jede der 3 Gleichungen (25) ist, wenn die Gleichungen (21) bei (24) bestehen, eine Folge einer andern.

Von den Größen a, b, c kann man durch passende Wahl des Coordinatensystems, auf welches die von den Functionen G und H abhängige Minimalfläche bezogen ist, eine verschwinden lassen, z. B. c_3, eine andere aber z. B. b_3 gleich 1 machen. Man erkennt dann, daß dann auch a_3 verschwindet. Dagegen dürfen die beiden Größen a_1 und a_2 nicht auch verschwinden, weil sonst $\frac{H}{G} = \text{const}$ wird.

Ferner dürfen die 3 Größen a_1, b_1, c_1 oder auch a_2, b_2, c_2 nicht gleichzeitig verschwinden, weil sonst G und H nicht mehr an 3 Stellen unendlich werden.

Wenn nun, wie im ersten hier in Betracht zu ziehenden Falle $\wp'(u_1 - u_2) = 0$, aber $\wp'(u_2 - u_3)$ und $\wp'(u_1 - u_3)$ von Null verschieden ist, so muß

$$\begin{aligned} a_{13} &= 0 \\ a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

werden. Es wird also $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ und das wurde ausdrücklich ausgeschlossen.

Um nun den zweiten Fall, daß nämlich

$$\wp'(u_2 - u_3) = \wp'(u_3 - u_1) = \wp'(u_1 - u_2)$$

und diese Größen von Null verschieden sind, ebenfalls hier vollständig erledigen zu können, ist es nötig, die Gleichungen zwischen den $a\ b\ c$, die sich auf Grund der Bedingung ergeben, daß die Coefficienten der elliptischen Integrale erster und zweiter Art in den Functionen U, V, W rein imaginär seien, noch zu den obigen Gleichungen hinzuzunehmen. Sie lauten

$$(26) \quad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= A_2 + B_2 i \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= A_2 - B_2 i \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= A_3 i \\ a_0^2 = A_1 + B_1 i, \ b_0^2 &= A_1 - B_1 i \\ c_0^2 &= A_4 i \end{aligned}$$

wo die A und B reelle Größen sind.

Da ferner G und H selbst eindeutige doppeltperiodische Functionen sind, so muß

$$(27)\quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \end{aligned}$$

sein.

Man erhält dann aus den Gleichungen (24)

$$(28)\quad \begin{aligned} a_{13} &= a_{12} - 2c_1^2 c_2^2 \\ a_{23} &= a_{12} - 2c_1^2 c_2^2 \end{aligned}$$

und deshalb erhalten die Gleichungen (25) die Form

$$(29)\quad \begin{aligned} (a_{12} - 2c_1^2 c_2^2)[\wp''(u_1 - u_2) + \wp''(u_1 - u_3)] + 2a_0^2 b_0^2 &= c_0^4 \\ (a_{12} - 2c_1^2 c_2^2)[\wp''(u_1 - u_2) + \wp''(u_2 - u_3)] + 2a_0^2 b_0^2 &= c_0^4 \\ (a_{12} - 2c_1^2 c_2^2)[\wp''(u_1 - u_2) + \wp''(u_2 - u_3)] + 2a_0^2 b_0^2 &= c_0^4. \end{aligned}$$

Hieraus würde folgen:
entweder $a_{12} - 2c_1^2 c_2^2 = 0$ also $a_{13} = a_{23} = 0$, was unbrauchbar ist, oder

$$\wp''(u_2 - u_3) = \wp''(u_3 - u_1) = \wp''(u_1 - u_2).$$

Nun sollen aber die Functionen

$$\wp(u_2 - u_3),\ \wp(u_3 - u_1) \text{ und } \wp(u_1 - u_2)$$

nicht selbst einander gleich sein, weil sonst die Größen $u_1 u_2 u_3$ gleich würden. Es muß also etwa werden

$$(30)\quad \wp(u_1 - u_2) = \wp(u_1 - u_3) = -\wp(u_2 - u_3).$$

Aus den Gleichungen (29) folgt dann

$$(31)\quad \begin{aligned} 2(a_{12} - 2c_1^2 c_2^2)\wp(u_1 - u_2) + a_{01} &= 2c_0^2 c_1^2 \\ a_{02} &= 2c_0^2 c_2^2 \\ a_{03} &= 0. \end{aligned}$$

Es wird also $a_0 = 0$ und, da b_0^2 die zu a_0^2 conjugirte complexe Zahl ist, auch $b_0^2 = 0$.

Dann wird aber entweder $c_0 = 0$, also

$$a_{12} - 2c_1^2 c_2^2 = 0$$

und daher

$$a_{13} = a_{23} = 0$$

was unbrauchbar ist, oder es wird $c_2 = 0$. Dann muß aber, da $a_2 = -a_1$ von Null verschieden sein muß, $b_2 = 0$ werden. Es ist also $b_1 = -b_3 = -1$; daher wird $B_2 = 0$ in den Gleichungen (26), also $a_1^2 = b_3^2 = 1$, $c_1^4 = a_1^2 b_1^2 = 1$. Nun soll aber c_1^2 rein

imaginär werden, denn $c_3 = c_2 = 0$ und $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = A_4 i$. Das ist also ein Wiederspruch. Auch diese zweite Annahme ist daher unbrauchbar.

§ 4. Bestimmung der Functionen G und H, wenn die Unstetigkeitstellen nicht alle von einander verschieden sind.

Wenn die 3 Unstetigkeitsstellen der Functionen G^2, H^2 und GH nicht alle 3 von einander verschieden sind, so sind zwei Fälle möglich:

1) Es fallen 2 Unstetigkeitsstellen z. B. u_2 und u_3 zusammen, während die dritte von jenen beiden verschieden ist. G^2, H^2 und GH müssen dann für $u = u_2$ von der dritten Ordnung, für $u = u_1$ von der zweiten Ordnung unendlich groß werden.

2) Die 3 Unstetigkeitsstellen $u_1\ u_2\ u_3$ fallen sämmtlich zusammen. G^2, H^2 und GH werden dann an dieser Stelle, die man passend mit $u = 0$ zusammenfallen lassen kann, von der vierten Ordnung unendlich groß.

ad. 1) Im ersten Falle hat man zu setzen

$$(31)\quad GH = C\,\frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdot\sigma(u-v_3)\,\sigma(u-v_4)\,\sigma(u-v_5)}{\sigma^2(u-u_1)\,\sigma^3(u-u_2)}.$$

Die einzige für die weitere Untersuchung brauchbare Zerlegung der Function $G^2 \cdot H^2$ in 2 Factoren G^2 und H^2 ist dann

$$(32)\quad \begin{aligned} G^2 &= C_1^2\,\frac{\sigma^2(u-v_1)\cdot\sigma^2(u-v_2)\cdot\sigma(u-v_5)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^3(u-u_2)}\,e^{mu} \\ H^2 &= C_2^2\,\frac{\sigma^2(u-v_3)\cdot\sigma^2(u-v_4)\cdot\sigma(u-v_5)}{\sigma^2(u-u_1)\cdot\sigma^3(u-u_2)}\,e^{-mu}. \end{aligned}$$

Damit G^2, H^2 und GH doppeltperiodische Functionen von u mit dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1, 2\omega_3$ werden, ist erforderlich, daß

$$(33)\quad \begin{aligned} m &= 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= 2u_1 + 3u_2 \\ 2v_1 + 2v_2 + v_5 &= 2u_1 + 3u_2 + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3 \\ 2v_3 + 2v_4 + v_5 &= 2u_1 + 3u_2 - 2k_1\omega_1 - 2k_3\omega_3 \end{aligned}$$

ist. Die Bezeichnungen sind dabei ebenso gewählt wie in § 2.

Man kann nun $v_1 = u_2$ setzen, dann muß entweder v_2 oder v_5 ebenfalls mit u_2 congruent werden, weil sonst G^2 für $u = u_2$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Nun darf aber v_5 keiner der Unstetigkeitsstellen u_1 und u_2 congruent werden, weil sonst

die Ordnung des Unendlichgroßwerdens an dieser Stelle sich für alle 3 Functionen G^2, H^2 und GH erniedrigt. Es muß also sein

$$v_1 = v_2 = u_2.$$

Die Forderung, daß in den Reihenentwickelungen der Functionen G^2, H^2 und GH für die Umgebungen der Stellen u_1 und u_2 keine Glieder mit der negativen ersten Potenz der Veränderlichen vorkommen sollen, führt unter anderen zu folgenden Gleichungen:

$$(34)\quad \begin{aligned} &\frac{\sigma'(u_1 - v_5)}{\sigma(u_1 - v_5)} + \frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} + 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3 = 0 \\ &2\frac{\sigma'(u_1 - v_3)}{\sigma(u_1 - v_3)} + 2\frac{\sigma'(u_1 - v_4)}{\sigma(u_1 - u_4)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_5)}{\sigma(u_1 - v_5)} - 3\frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} \\ &\qquad\qquad - 2k_1\eta_1 - 2k_3\eta_3 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(35)\quad \frac{\sigma'(u_1 - v_3)}{\sigma(u_1 - v_3)} + \frac{\sigma'(u_1 - v_4)}{\sigma(u_1 - v_4)} - 2\frac{\sigma'(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} = 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung zwischen v_3, v_4 und u_2 folgt hinaus

$$\wp'(u_1 - u_2) = 0.$$

Daraus würde aber folgen, daß v_5 zu u_2 congruent wäre, was, wie oben schon hervorgehoben wurde, ausgeschlossen werden muß.

ad. 2) Wenn nun G^2, H^2, und GH nur für $u = 0$ von der vierten Ordnung unendlich groß werden sollen, so hat man

$$(36)\quad G \cdot H = C\,\frac{\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2)\,\sigma(u - v_3)\,\sigma(u - v_4)}{\sigma^4 u}$$

zu setzen. Auch hier giebt es nur eine für die weitere Untersuchung brauchbare Zerlegung von $G^2 H^2$ in zwei Factoren:

$$(37)\quad \begin{aligned} G^2 &= C_1^2\,\frac{\sigma^2(u - v_1)\cdot\sigma^2(u - v_2)}{\sigma^4 u}\,e^{mu} \\ H^2 &= C_2^2\,\frac{\sigma^2(u - v_3)\cdot\sigma^2(u - v_4)}{\sigma^4 u}\,e^{-mu}, \end{aligned}$$

wo die Gleichungen gelten

$$(38)\quad \begin{aligned} C_1 C_2 = C,\ m &= 2k_1\eta_1 + 2k_3\eta_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= 0 \\ v_1 + v_2 &= k_1\omega_1 + k_3\omega_3 \\ v_3 + v_4 &= k_1\omega_1 + k_3\omega_3. \end{aligned}$$

Man darf nun $v_1 = 0$ setzen, also

$$v_2 = k_1 \omega_1 + k_3 \omega_3,$$

v_3 und v_4 müssen dann folgende Gleichuug befriedigen

$$(39) \qquad \begin{aligned} &\wp' v_3 + \wp' v_4 + 6\left(\frac{\sigma' v_3}{\sigma v_3} + \frac{\sigma' v_4}{\sigma v_4} + k_1 \eta_1 + k_3 \eta_3\right)(\wp v_3 + \wp v_4) \\ &\quad - 4\left(\frac{\sigma' v_3}{\sigma v_3} + \frac{\sigma' v_4}{\sigma v_4} + k_1 \eta_1 + k_3 \eta_3\right)^3 = 0. \end{aligned}$$

Es sind nun wie in § 2 wieder 2 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{(A)} \quad k_1 = 0, \; k_3 = 0,$$

also

$$v_2 = 0, \; v_3 = -v_4.$$

Die oben angegebene Gleichung (39) ist dann identisch erfüllt. Man erhält also

$$(40) \qquad \begin{aligned} v_1 &= 0, \; v_2 = 0 \\ v_3 &= v, \; v_4 = -v, \end{aligned}$$

wo v eine willkürliche Constante bedeutet.

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} k_1 \omega_1 + k_3 \omega_3 &= \omega_\mu \\ v_4 &= -v_3 - \omega_\mu. \end{aligned}$$

Auch jetzt ist die Gleichung zwischen v_3 und v_4 identisch erfüllt. Man erhält also

$$(41) \quad v_1 = 0, \; v_2 = \omega_\mu, \; v_3 = v, \; v_4 = -v - \omega_\mu.$$

§ 5. Zusammenstellung der erhaltenen Functionen G^2 und H^2.

Zum Schluß mögen nun die in diesem Abschnitt gefundenen Functionen G^2, H^2 und $G \cdot H$ noch einmal zusammengestellt werden. Dabei sollen aber für die Producte der σ Functionen $\wp$ Functionen eingeführt werden [1]). Die durch die Gleichungen (14) und (15) bestimmten Functionen können dadurch in die Form gebracht werden:

$$(42) \qquad \begin{aligned} G^2 &= c_1^2 \frac{\wp u - p}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)} \\ H^2 &= c_2^2 \frac{(\wp u - q)^2 \cdot (\wp u - p)}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)} \\ G \cdot H &= c_1 c_2 \frac{(\wp u - q)(\wp u - p)}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)}, \end{aligned}$$

wo $c_1 c_2$ p und q willkürliche Constante sind.

1) „Formeln". Art. 11. Nro. 1.

Die Formel (20) ergiebt für G^2 und H^2 folgende Ausdrücke

$$(43)\quad \begin{aligned} G^2 &= c_1^2\,\frac{\wp u - e_2}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)} \\ H^2 &= c_2^2\,\frac{(\wp u - q)^2(\wp u - e_2)}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)}. \end{aligned}$$

Diese Functionen sind also nur specielle Fälle der in (42) angegebenen. Man erhält sie, wenn man dort $p = e_2$ setzt.

Aus den Gleichungen (40) und (41) ergeben sich für G^2, H^2 und $G \cdot H$ folgende Werte:

$$(44)\quad G^2 = c_1^2,\ H^2 = c_2^2(\wp u - \wp v)^2,\ GH = c_1 c_2(\wp u - \wp v)$$

$$(45)\quad \begin{aligned} G^2 &= c_1^2(\wp u - e_2),\ H^2 = c_2^2(\wp u - \wp v)^2[\wp(u+v) - e_2] \\ G \cdot H &= c_1 c_2(\wp u - \wp v)\sqrt{[(\wp u - e_2)\wp(u+v) - e_2]}. \end{aligned}$$

II. Abschnitt.

§ 6. Darstellung der Functionen G^2, H^2 und $G \cdot H$ durch Functionen $\wp u$ und $\wp(u - \omega_\lambda)$ und deren Ableitungen.

Um die in Ausdrücken für G^2, H^2 und $G \cdot H$ auftretenden Constanten so zu bestimmen, daß die Coefficienten von u und $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ in den Functionen U, V, W rein imaginär werden, ist es nötig, die Functionen G^2, H^2 und GH in eine andere bequemere Form zu bringen. Man kann nämlich die in (42) und (43) angegebenen Functionen folgendermaßen darstellen [1])

$$(46)\quad \begin{aligned} G^2 &= c_1^2[a_{01} + a_{11}\wp u + a_{21}\wp(u - \omega_1) + a_{31}\wp(u - \omega_3)] \\ H^2 &= c_2^2[a_{02} + a_{12}\wp u + a_{22}\wp(u - \omega_1) + a_{32}\wp(u - \omega_3)] \\ GH &= c_1 c_2[a_{03} + a_{13}\wp u + a_{23}\wp(u - \omega_1) + a_{33}\wp(u - \omega_3)], \end{aligned}$$

die in (44) und (45) angegebenen aber

$$(47)\quad \begin{aligned} G^2 &= c_1^2(b_{01} + b_{11}\wp u + b_{21}\wp' u + b_{31}\wp'' u) \\ H^2 &= c_2^2(b_{02} + b_{12}\wp u + b_{22}\wp' u + b_{32}\wp'' u) \\ G \cdot H &= c_1 \cdot c_2(b_{03} + b_{13}\wp u + b_{23}\wp' u + b_{33}\wp'' u). \end{aligned}$$

Die constanten Größen $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$ haben folgende Werte:

---

1) „Formeln“. Art. 16.

a) wenn man für G^2, H^2, GH die in (42) angegebenen Ausdrücke nimmt

$$
(48)\quad \begin{aligned}
a_{11} &= 0, \qquad a_{21} = \frac{e_1-p}{e_1-e_2}, \qquad a_{31} = \frac{e_3-p}{e_3-e_2}\\
a_{12} &= (e_1-e_3)^2,\ a_{22} = (e_1-q)^2 a_{21},\ a_{32} = (e_3-q)^2 a_{31}\\
a_{13} &= 0, \qquad a_{23} = (e_1-q)\,a_{21},\ a_{33} = (e_3-q)\,a_{31}\\
a_{01} &= -a_{21}\,e_1 - a_{31}\,e_3\\
a_{02} &= -a_{12}\,\wp v - a_{22}\,\wp(v-\omega_1) - a_{32}\,\wp(v-\omega_3)\\
a_{03} &= -a_{23}\,\wp(v-\omega_1) - a_{33}\,\wp(v-\omega_3),
\end{aligned}
$$

wo $\wp v = q$ sein soll;

b) wenn man die in (43) angegebenen Ausdrücke nimmt, im wesentlichen dieselben wie die eben angegebenen; nur ist $p = e_2$ zu setzen;

c) wenn man die (44) und (45) angegebenen Ausdrücke nimmt, im ersten Falle

$$
(49)\quad \begin{aligned}
b_{11} &= 0, \qquad b_{21} = 0,\ b_{31} = 0,\ b_{01} = 1\\
b_{12} &= -2\wp v,\ b_{22} = 0,\ b_{32} = \tfrac{1}{8},\ b_{02} = \wp v^2 + \tfrac{1}{12} g_2\\
b_{13} &= 1, \qquad b_{23} = 0,\ b_{33} = 0,\ b_{03} = -\wp v,
\end{aligned}
$$

im zweiten Falle

$$
(50)\quad \begin{aligned}
b_{11} &= 1,\ b_{21} = 0,\ b_{31} = 0,\ b_{01} = -e_2\\
b_{12} &= \tfrac{1}{2}\wp'' v - 2\wp v\,(\wp v - e_2),\ b_{22} = -\tfrac{1}{2}\wp' v\\
b_{32} &= \tfrac{1}{8}(\wp v - e_2),\ b_{02} = -b_{12}\,\wp v - b_{22}\,\wp' v - b_{32}\,\wp'' v\\
b_{13} &= \tfrac{1}{2}\frac{\wp' v}{\sqrt{\wp v - e_2}},\ b_{23} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\wp v - e_2},\ b_{33} = 0\\
b_{03} &= -b_{13}\,e_2.
\end{aligned}
$$

§ 7. Bestimmung der Constanten.

Die angegebenen Größen $a_{\mu\nu}$ und $b_{\mu\nu}$, ferner die Größen c_1 und c_2 müssen nun so bestimmt werden, daß die Functionen U, V, W die in (1) angegebene Form annehmen. Es müssen daher folgende Gleichungen zunächst für die $a_{\mu\nu}$ und die c erfüllt sein

$$
(51)\quad \begin{aligned}
c_1^2(a_{11}+a_{21}+a_{31}) &= A_1 + B_1 i\\
c_2^2(a_{12}+a_{22}+a_{32}) &= A_1 - B_1 i\\
c_1^2 a_{01} = A_2 + B_2 i,\ c_2^2 a_{02} &= A_2 - B_2 i\\
c_1 c_2 (a_{13}+a_{23}+a_{33}) &= A_3 i\\
c_1 c_2 a_{03} &= A_4 i,
\end{aligned}
$$

wo die $A_1\, B_1$ u. s. w. reelle Constante bedeuten.

Diese Gleichungen nehmen wegen der in (48) angegebenen Werte von $a_{\mu\nu}$ die Gestalt an

$$
\begin{aligned}
&c_1^2(a_{21}+a_{31}) = A_1 + B_1 i \\
&c_3^2[(e_1-e_3)^2+(e_1-q)^2 a_{21}+(e_3-q)^2 a_{31}] = A_1 - B_1 i \\
&c_1^2(a_{21}e_1+a_{31}e_3) = -A_2 - B_2 i \\
(52)\quad &c_3^2[(e_1-e_3)^2(e_2+2q+p)+(e_1-q)^2 a_{21}e_1+(e_3-q)^2 a_{31}e_3] \\
&\qquad = -A_2 + B_2 i \\
&c_1 c_3[(e_1-q)a_{21}+(e_3-q)a_{31}] = A_3 i \\
&c_1 c_3[(e_1-q)a_{21}e_1+(e_3-q)a_{31}e_3-(e_1-e_3)^2] = -A_4 i.
\end{aligned}
$$

Man bezeichne die zu p und q conjugirten complexen Zahlen mit p' resp. q'. Dann dividire man die linke Seite der vierten Gleichung (52) durch die der zweiten, ebenso die der dritten durch die der ersten, bilde zu diesem letzten Quotienten den conjugirten Wert, so ist dieser in Folge der obigen Gleichungen dem ersten Quotienten gleich. Ferner ist der conjugirte Werth des ersten Quotienten dem zweiten Quotienten gleich. Endlich ist der Quotient der linken Seiten der beiden letzten Gleichungen (52) seinem conjugirten Werte gleich. So ergeben sich also 3 Gleichungen, die, nach Potenzen von q und q' geordnet, lauten:

$$
\begin{aligned}
&q^2(p-p')+2q(e_1e_3+e_2^2+2p'e_2-pp')+2e_2^3 \\
&\qquad +(p+3p')(e_1e_3+e_2^2)+2e_2pp' = 0 \\
(53)\quad &q'^2(p-p')-2q'(e_1e_3+e_2^2+2pe_2-pp')-2e_2^3 \\
&\qquad -(p'+3p)(e_1e_3+e_2^2)-2e_2pp' = 0 \\
&2qq'(p-p')-2q(e_1e_3+e_2^2+2pe_2-pp') \\
&\qquad +2q'(e_1e_3+e_2^2+2p'e_2-pp')-2(p-p')(e_1e_3+e_2^2) = 0.
\end{aligned}
$$

Durch Addition dieser 3 Gleichungen erhält man

$$
(54)\quad (p-p')(q+q')^2-4e_2(q+q')(p-p')-4(p-p')(e_1e_3+e_2^2) = 0.
$$

Daher wird entweder

$$p-p' = 0$$

oder

$$(q+q')^2-4e_2(q+q')-4(e_1e_3+e_2^2) = 0.$$

Der erste Fall soll zuerst erledigt werden.

Wenn $p = p'$ wird, so muß auch

$$q = q'$$

werden und zwar ergiebt sich

$$(55)\quad q = -\frac{e_2^3 + 2p(e_1 e_3 + e_2^2) + e_2 p^3}{e_1 e_3 + e_2^2 + 2e_2 p - p^2}.$$

Um c_1 und c_2 zu berechnen, kann man die Größe

$$A_1 = 0$$

setzen, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann. Dann müssen sowohl c_1^2, als auch c_2^2 und $c_1 \cdot c_2$ rein imaginäre Werte annehmen und in Folge dessen muß auch

$$A_2 = 0$$

werden. Man setze

$$(56)\quad \begin{aligned} c_1 &= k\,(1+i) \\ c_2 &= l\,(1+i) \end{aligned}$$

wo k und l reelle Zahlen bedeuten, dann findet man für das Verhältnis $k^2 : l^2$ folgenden Wert

$$\frac{k^2}{l^2} = -\frac{(e_1 - e_3)^2 + (e_1 - q)^2\, a_{21} + (e_3 - q)^2\, a_{31}}{a_{21} + a_{31}}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck den Wert von q ein, so läßt sich der auf der rechten Seite stehende Bruch durch $2e_1 e_3 + e_2^2 + 3e_2 p$ heben und man erhält

$$(57)\ \frac{k^2}{l^2} = -(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)\frac{p^4 + 2e_2 p^3 + 6e_1 e_3 p^2 - 2(e_1^3 + e_3^3)p + e_1^2 e_3^2 + (e_2^2 + e_1 e_3)(e_1 - e_3)^2}{(p^2 - 2\,e_2\,p - e_1\,e_3 - e_2^2)^2}.$$

Die Constante p bleibt daher willkürlich, sie muß nur so angenommen werden, daß bei beliebig gewählten Invarianten g_2 und g_3 der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ der Quotient $\frac{k}{l}$ reell wird. Nun ist die Discriminante des im Zähler auf der rechten Seite befindlichen biquadratischen Ausdrucks

$$D = -432\,(e_1 - e_3)^6\,(e_2 - e_1)^2\,(e_2 - e_3)^2.$$

Sie ist also stets negativ, wenn, wie ja vorausgesetzt ist, g_2 und g_3 reell sind. Der erwähnte biquadratische Ausdruck, gleich Null gesetzt, ergiebt daher eine biquadratische Gleichung, die 2 und nur 2 reelle Wurzeln hat. Bezeichnet man dieselben mit p_1 und p_2 und sei $p_1 > p_2$, so darf für den Fall, daß

$$g_2^3 - 27\,g_3^2 > 0,$$

also

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) < 0$$

ist, p alle reellen Zahlenwerte von $-\infty$ bis p_2 und von p_1 bis $+\infty$ annehmen. Ist aber

$$g_2^3 - 27 g_3^2 < 0,$$

also

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) > 0,$$

dann ist p auf die reellen Zahlen in dem Intervalle von p_1 bis p_2 beschränkt.

Daß p einem Werte p_1 oder p_2 selbst gleich werde, ist natürlich ausgeschlossen, weil dann $k = 0$, also $c_1 = 0$ werden würde. Ebenso müssen die Werte

$$p = e_2 \pm \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}$$

ausgeschlossen werden. Denn für diese Werte verschwindet der Nenner von q; wie aus den Gleichungen (53) sich ergiebt, muß aber in diesem Falle auch der Zähler verschwinden, beides kann nur eintreten, wenn

$$(e_2 - e_1)(e_3 - e_1) = 0$$

wird. Dann erniedrigt sich aber für G und H die Ordnung des Unendlichgroßwerdens. In allen anderen Fällen aber erhält man Functionen G und H, welche eine zweifach unendliche Schaar von Minimalflächen mit reellen algebraischen Curven bestimmen. Die Parameter dieser Flächen sind die reellen Größen $g_2 : g_3$ und p.

Nun muß noch der Fall erledigt werden, daß p nicht gleich p', sondern

$$(q + q')^2 - 4e_2(q + q') - 4(e_1 e_3 + e_2^2) = 0$$

ist. Dann wird

$$q + q' = 2[e_2 \pm \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}] = 2r,$$

wenn $q = r + ti$, $q' = r - ti$ gesetzt wird.

Hieraus folgt zunächst, daß

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) > 0$$

also

$$g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$$

sein muß.

Aus den Gleichungen (53) folgt dann weiter

$$(p - p')(q - q')^2 + 4(q - q')[e_1 e_3 + e_2^2 + e_2(p + p') - pp'] = 0,$$

also entweder

$$q - q' = 0$$

oder

$$(p - p')(q - q') + 4[e_1 e_3 + e_2^2 + e_2(p + p') - pp'] = 0.$$

Die Annahme $q = q'$ ergiebt in Verbindung mit den beiden ersten Gleichungen (53)

$$q[e_1 e_3 + e_2^2 + e_2(p + p') - pp'] + e_2^3 + (e_1 e_3 + e_2^2)(p + p') + e_2 pp' = 0,$$

oder wenn man

$$p = m + ni$$
$$p' = m - ni \text{ setzt,}$$

$$m^2 + n^2 - 2mr - e_1 e_3 - e_2 r = 0.$$

Die zweite Annahme aber

$$(p - p')(q - q') + 4[e_1 e_3 + e_2^2 + e_2(p + p') - pp'] = 0$$

ergiebt in Verbindung mit den Gleichungen (53)

$$(q + q')(e_1 e_3 + e_2^2 - pp') + 2e_2(pq + p'q') - 2e_2^3$$
$$- 2(p + p')(e_1 e_3 + e_2^2) - 2e_2 pp' = 0,$$

oder

$$m^2 + n^2 - 2mr' - e_1 e_3 - e_2 r' = 0,$$

wo

$$r' = e_2 \mp \sqrt{(e_2 - e_1)(e_3 - e_2)}$$

gesetzt und das Vorzeichen in diesem Ausdrucke so zu wählen ist, daß

$$r' + r = 2e_2 \text{ ist.}$$

Aus den Gleichungen (52) ergeben sich nun noch folgende

$$c_1^2 c_2^2 (e_1 - e_3)^2 [a_{21} a_{31} + a_{21} + a_{31}] = A_1^2 + B_1^2 + A_3^2$$
$$c_1^2 c_2^2 (e_1 - e_3)^2 [a_{21} a_{31} \cdot e_1 \cdot e_3 + (e_1 - e_3)(a_{21} e_1 - a_{31} e_3)$$
$$+ p(a_{21} e_1 + a_{31} e_3) - (e_1 - e_3)^2] = A_2^2 + B_2^2 + A_4^2,$$

aus denen folgt

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)(p - p')[e_2 pp' + 2e_1 e_3 (p + p') + e_2(5e_1 e_3 - e_2^2)] = 0.$$

Wäre nun

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = 0,$$

so würde

$$q = q' = r = e_2.$$

Man erhielte daher für m und n die Gleichung

$$m^2+n^2-2m\,e_2+e_2^2 = 0,$$

oder

$$m = e_2,\ n = 0,\ \text{also}\ p = p'.$$

Wenn also p nicht gleich p' sein soll, so muß sein

$$e_2pp'+2e_1e_3(p+p')+e_2(5e_1e_3-e_2^2) = 0,$$

oder

$$e_2(m^2+n^2)+4e_1e_3m+5e_1e_2e_3-e_2^3 = 0.$$

Aus dieser und einer der oben angegebenen Gleichungen für m und n müssen diese Größen berechnet werden. Ist dies geschehen, so läßt sich auch q und weiter c_1 und c_2 berechnen. Setzt man nämlich

$$e_1e_3 = (k^2-2)\,e_2^2,$$

wo k eine reelle Constante bedeutet, so wird

$$r = (1-k)e_2,\ r' = (1+k)e_2.$$

Nimmt man dann zunächst an, daß q nicht gleich q' also t von Null verschieden sei, so wird

$$2m = -\frac{3k-4}{k-1}e_2,\ m^2+n^2 = \frac{k^3-3k^2-k-5}{k-1}e_2^2$$

$$4n^2 = \frac{(2k-3)(2k^3-5k^2-8k+12)}{(k-1)^2}e_2^2,\ nt = \frac{(2k-3)k}{k-1}e_2^2.$$

Nun muß aber noch folgende Gleichung erfüllt sein

$$\frac{[(e_1-q)a_{21}+(e_3-q)a_{31}]^2}{a_{21}a_{31}+a_{21}+a_{31}} = -(e_1-e_3)^2\frac{A_3^2}{A_1^2+B_1^2+A_3^2}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(a_1-q)a_{21}+(e_3-q)a_{31} = M+Ni$$
$$a_{21}\cdot a_{31}+a_{21}+a_{31} = P+Qi,$$

so muß auf Grund obiger Gleichung

$$2PMN-QM^2+QN^2 = 0$$

werden. Nun wird aber

$$M = \frac{(2k-3)(2k+3)}{2(k-1)}e_2,\ N = -\frac{(2k-3)^2(2k+3)(k-2)}{(k-1)^2 4n}e_2^2$$

$$P = \frac{(2k-3)(2k^2+k-4)}{2k(k-1)^2},\ Q = \frac{n}{k(k-1)e_2}.$$

Man erhält daher für k die Gleichung

$$(2k-3)^3(2k+3)^2(k-1)^2(k^2-k-3) = 0.$$

Die Wurzel $k = 1$ dieser Gleichung ist von vornherein auszuschließen, weil für diesen Wert von k die Gleichungen für m und n keine brauchbaren Lösungen haben. Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung machen aber $4n^2$ entweder zu Null oder negativ und beides ist hier auszuschließen.

Wenn $q = q'$, also $t = 0$ wird, so setze man

$$q = r = (k+1)e_2,\ r' = -(k-1)e_2.$$

Die oben angegebenen Ausdrücke für $2m^2$, m^2+n^2 und $4n^2$ bleiben dann unverändert, ebenso die für P und Q; dagegen wird

$$M = -\frac{(2k-3)(2k+3)(k-2)}{2k(k-1)},\ N = -2n\frac{2k+3}{2k}.$$

Die Gleichung, die sich dann für k ergiebt, besteht aus denselben Factoren, wie die obige.

Man erhält also auch hier keine brauchbaren Werte für die Constanten von G und H.

§ 8. Bestimmung der Constanten. Fortsetzung.

Die Gleichungen, welchen die in (49) und (50) angegebenen Größen $b_{\mu\nu}$ genügen müssen, sind

$$(58)\quad \begin{aligned} c_1^2 b_{11} &= A_1 + B_1 i, & c_2^2 b_{12} &= A_1 - B_1 i \\ c_1^2 b_{01} &= A_2 + B_2 i, & c_2^2 b_{02} &= A_2 - B_2 i \\ c_1 c_2 b_{13} &= A_3 i & c_1 c_2 b_{03} &= A_4 i, \end{aligned}$$

wo die A und B reelle Größen sind.

Setzt man in diese Gleichungen die in (49) angegebenen Werte für $b_{\mu\nu}$ ein, und nimmt an, daß $A_2 = 0$ sei, so erhält man

$$(59)\quad \wp v = 0,\ c_1^2 = B_2 i,\ c_2^2 = -B_2 i\frac{12}{g_2}.$$

Weil $c_1 c_2$ rein imaginär sein muß, so muß g_2 negativ sein. Setzt man etwa $B_2 = g_2$ so wird

$$(60)\quad G^2 = g_2 i,\ H^2 = -12 i\wp^2 u.$$

Wenn man aber die in den Gleichungen (50) angegebenen Werte der $b_{\mu\nu}$ in die Gleichungen (58) einsetzt, so werden dieselben:

$$
(61)\quad \begin{aligned}
&c_1^2 = A_1 + B_1 i\\
&c_2^2(\wp v^2 + 2e_2 \wp v - \tfrac{1}{4} g_2) = A_1 - B_1 i\\
&c_1^2 e_2 = -A_2 - B_2 i\\
&c_2^2(e_2 \wp^2 v + \tfrac{1}{6} g_2 \wp v + \tfrac{1}{12} g_2 e_2 + \tfrac{1}{2} g_3) = -A_2 + B_2 i\\
&c_1 c_2 \tfrac{1}{2} \frac{\wp' v}{\sqrt{\wp v - e_2}} = A_3 i,\quad c_1 c_2 \tfrac{1}{2} \frac{\wp' v \cdot e_2}{\sqrt{\wp v - e_2}} = -A_4 i.
\end{aligned}
$$

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen folgt

$$A_2 = -e_2 A_1,\quad B_2 = -e_2 B_1$$

und deshalb aus der zweiten und vierten Gleichung

$$(\wp v - e_2)(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = 0.$$

Nun darf aber nicht $\wp v = e_2$ werden, weil sonst $\frac{H}{G} = \text{const.}$ würde; daher muß

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) - 0$$

sein. Die Functionen G^2, H^2 und GH werden daher in diesem Falle rationale Functionen von trigonometrischen oder Exponentialfunctionen von u. Führt man aber den Uebergang zu diesen Functionen aus[1]), so erkennt man daß auch die Functionen U, V, W nur trigonometrische oder Exponentialfunctionen der complexen Variabeln u enthalten, während u explicite nicht vorkommt, daß daher die zugehörigen Minimalflächen algebraische Flächen sind.

§ 9. Die Functionen U, V, W.

Durch die Constantenbestimmung hat sich die Zahl der Functionsgruppen G^2, H^2 und GH auf zwei wesentlich verschiedene reducirt. Die erste Gruppe enthält die Functionen, welche an 3 von einander verschiedenen Stellen innerhalb des Periodenparallelogramms der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ unendlich groß werden. Diese Functionen enthalten 2 willkürliche reelle Parameter; nämlich das Verhältnis der Invarianten $g_2 : g_3$ der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ und einen zweiten p, dessen Veränderlichkeit bei gegebenen Werten von g_2 und g_3 auf ein Gebiet beschränkt ist, dessen Grenzen von g_2 und g_3 abhängen. Die zweite Gruppe enthält die Functionen, welche nur an e i n e r Stelle innerhalb des Periodenparallelogramms von $\wp u$ und $\wp' u$ unendlich groß werden. Sie enthalten als willkürlichen Parameter nur $g_2 : g_3$, wo g_2 reell und negativ sein muß.

1) „Formeln". Art. 10.

Die Gleichungen (3) definiren nun vermittels der Functionen G^2, H^2 und GH 3 Functionen U, V, W, die jetzt angegeben werden sollen.

Die zu der ersten Gruppe der G^2, H^2, GH gehörigen Functionen U, V, W lauten

$$(62)\quad \begin{aligned} U &= 2B_2 iu + 2a_1 i\frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2a_2 i\frac{\sigma'(u-\omega_1)}{\sigma(u-\omega_1)} + 2a_3 i\frac{\sigma'(u-\omega_3)}{\sigma(u-\omega_3)} + C_1 \\ V &= \qquad\quad + 2b_1 \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2b_2 \frac{\sigma'(u-\omega_1)}{\sigma(u-\omega_1)} + 2b_3 \frac{\sigma'(u-\omega_3)}{\sigma(u-\omega_3)} + C_2 \\ W &= 2A_4 iu \qquad\qquad + 2c_2 i\frac{\sigma'(u-\omega_1)}{\sigma(u-\omega_1)} + 2c_3 i\frac{\sigma'(u-\omega_3)}{\sigma(u-\omega_3)} + C_3. \end{aligned}$$

Hier ist

$$a_1 = \tfrac{1}{2} l^2 (e_1 - e_3)^2,\ a_2 = -\tfrac{1}{2}[k^2 - l^2(e_1-q)^2]\frac{e_1-p}{e_1-e_2}$$

$$a_3 = -\tfrac{1}{2}[k^2 - l^2(e_3-q)^2]\frac{e_3-p}{e_3-e_2}$$

$$b_1 = a_1,\ b_2 = \tfrac{1}{2}[k^2 + l^2(e_1-q)^2]\frac{e_1-p}{e_1-e_2},\ b_3 = \tfrac{1}{2}[k^2 + l^2(e_3-q)^2]\frac{e_3-p}{e_3-e_2}$$

$$c_2 = -kl(e_1-q)\frac{e_1-p}{e_1-e_2},\qquad c_3 = -kl(e_3-q)\frac{e_3-p}{e_3-e_2}$$

$$B_2 = -2k^2\left(e_1\frac{e_1-p}{e_1-e_2} + e_3\frac{e_3-p}{e_3-e_2}\right)$$

$$A_4 = 2kl\left((e_1-e_3)^2 - (e_1-q)e_1\frac{e_1-p}{e_1-e_2} - (e_3-q)e_3\frac{e_3-p}{e_3-e_2}\right).$$

Die Größen q und $k^2 : l^2$ sind durch die Gleichungen (55) und (57) bestimmt.

Die zu der zweiten Gruppe von Functionen G^2, H^2, GH gehörigen U, V, W lauten

$$(63)\quad \begin{aligned} U &= 2ig_2 u + 2i\wp' u \\ V &= 2\wp' u \qquad\qquad g_2 \text{ reell negativ.} \\ W &= 4\sqrt{3g_2}\,\frac{\sigma' u}{\sigma u}. \end{aligned}$$

Zu jeder Gruppe der G^2, H^2 und GH gehören außerdem noch 2 Functionen s und $\mathfrak{F}(s)$, die für die erste Gruppe lauten

$$(64)\quad s = \frac{k}{l}(\wp u - q),\ \mathfrak{F}(s) = 2kli\frac{\wp u - p}{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)}\cdot\frac{1}{\wp' u},$$

für die zweite Gruppe:

$$(65)\quad s = \sqrt{-\frac{12}{g_2}}\cdot \wp u,\ \mathfrak{F}(s) = g_2 i\sqrt{-\frac{g_2}{12}}\,\frac{1}{\wp' u}.$$

III. Abschnitt.

§ 10. Untersuchung der Eigenschaften der zu den Functionen U, V, W gehörigen Minimalflächen.

Die reellen Bestandteile der Functionen U, V, W, die im letzten Abschnitte angegeben wurden, definiren die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche als Functionen von zwei unabhängigen reellen Veränderlichen ξ und η:

$$(66) \quad x = \Re(U), \quad y = \Re(V), \quad z = \Re(W),$$

wenn die Veränderliche u der Functionen U, V, W

$$u = \xi + \eta i$$

gesetzt ist.

Diese Coordinaten sind für constante Werte von η doppeltperiodische Functionen im allgemeinen von der sechsten Ordnung in Bezug auf die Veränderliche ξ mit dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Die Curven $\eta = \text{const}$ sind also auf den durch obige Gleichung definirten Minimalflächen algebraische Curven, welche im allgemeinen von der sechsten Ordnung sind. Die Curven $\xi = \text{const}$ auf den Flächen sind transcendente Curven, wie auch die Flächen selbst transcendente Flächen sind; denn in den Ausdrücken für die Coordinaten x, y, z sind ηi, $\frac{\sigma' \eta i}{\sigma \eta i}$, $\wp \eta i$, $\wp' \eta i$ und $\wp'' \eta i$ enthalten, zwischen denen eine algebraische Gleichung nicht bestehen kann. Die Curvenschaaren $\eta = \text{const}$ und $\xi = \text{const}$ auf den Flächen sind orthogonal zu einander und bilden ein isometrisches Curvensystem auf den Flächen.

Die Gleichungen für die Coordinaten enthalten neben den Variabeln ξ und η noch mehrere willkürliche Größen und zwar die (62) angegebenen 3: g_2, g_3 und p, die in (63) angegebenen aber nur die beiden g_2 und g_3. Die Functionen U, V, W bestimmen also nicht einzelne Minimalflächen, sondern in dem ersten Falle eine zweifach unendliche, im zweiten Falle eine einfach unendliche Schaar solcher Flächen.

Die Functionen U, V, W definiren noch zwei andere Schaaren von Flächen, die man erhält, wenn man die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes gleich den reellen Bestandteilen der mit i multiplicirten Functionen U, V, W setzt, also

$$(67) \quad x = \Re(iU), \quad y = \Re(iV), \quad z = \Re(iW).$$

Die Flächen dieser beiden Schaaren sind Biegungsflächen der entsprechenden Flächen der andern beiden Schaaren [1]). Dabei entsprechen den Krümmungslinien der Flächen der ersten Art die Asymptotenlinien derer der andern Art, den Asymptotenlinien der ersteren die Krümmungslinien der letzteren. Wegen der besondern Form der hier gebrauchten Functionen U, V, W ist aber

$$(68)\quad \begin{aligned} iU(u; g_2, g_3) &= U(ui; g_2, -g_3) \\ iV(u; g_2, g_3) &= V(ui; g_2, -g_3) \\ iW(u; g_2, g_4) &= W(ui; g_2, -g_3). \end{aligned}$$

Man sieht also, daß alle durch die Gleichungen (67) definirten Flächen, schon unter den durch die Gleichungen (66) definirten enthalten sind. Diese letzteren Flächen sind also paarweise einander zugeordnet, indem sich die Flächen eines jeden Paares in der Art auf einander verbiegen lassen, daß die Krümmungslinien der einen nach der Biegung auf die Asymptotenlinien der anderen fallen und umgekehrt die Asymptotenlinien der einen auf die Krümmungslinien der anderen fallen. Aus den Gleichungen (68) erkennt man, daß bei dieser Biegung die algebraischen Curven und die zu diesen orthogonale Schaar transcendenter Curven sich entsprechen. Die Gleichungen der Flächen eines solchen Paares unterscheiden sich nur dadurch, daß die Invarianten g_3 in beiden entgegengesetzt gleich sind.

Man nehme nun zuerst als Functionen U, V, W die in (62) angegebenen, gebe den Größen g_2, g_3 und p bestimmte mit einander verträgliche Werte und setze zunächst voraus, daß diese Werte so gewählt sind, daß die Discriminante

$$G = \tfrac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2) > 0$$

sei. Von den beiden primitiven Perioden der Functionen $\wp u$, $\wp' u$ ist dann die eine, $2\omega_1$, reell, die andere $2\omega_3$, imaginär.

Setzt man dann in den Gleichungen für die Coordinaten zunächst

$$\xi = 0,$$

so wird

$$y = 0\,[2]),\ s \text{ reell},$$

wo s den in (64) angegebenen Wert hat. Die transcendente Curve $\xi = 0$ ist also eine ebene geodätische Linie der Fläche und ihre

1) Vergl. H. A. Schwarz. Miscellen a. d. Geb. d. Min.; a. a. O. Seite 287.

2) Es ist eigentlich $y =$ const. Doch kann man durch Verfügung über die Constante C_2 bewirken, daß $y = 0$ für $\xi = 0$ wird.

Ebene, die Ebene $y = 0$, eine Symmetrieebene derselben. Ein gleiches gilt für die Curve $\xi = \omega_1$; dann für sie ist ebenfalls $y = 0$, s rell.

Setzt man $\eta = 0$, so wird

$$x = 0,\ z = 0,\ s \text{ reell.}$$

Die Fläche enthält also die Y-Axe des zu Grunde gelegten Coordinatensystems in ihrer ganzen Erstreckung. Dieselbe gehört der Schaar der auf der Fläche liegenden algebraischen Curven an und ist eine Symmetrieaxe der Fläche. Außer dieser geraden Linie enthält die Fläche aber noch eine unendlich große Zahl von geraden Linien, die sämmtlich der Y-Axe parallel sind, in einer und derselben Ebene liegen und von einander gleichweit entfernt sind. Denn setzt man

$$\eta = \mu \frac{\omega_3}{i},$$

wo μ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so erhält man

$$x = 2\mu B_2 i \omega_3 - 2\mu i (a_1 + a_2 + a_3) \eta_3$$
$$z = 2\mu i A_4 \omega_3 - 2\mu i (c_2 + c_3) \eta_3,$$

wenn $\eta_3 = \dfrac{\sigma' \omega_3}{\sigma \omega_3}$ ist.

Dies sind für jeden Wert von μ die Gleichungen einer graden Linie, die ganz auf der Fläche liegt. Alle diese graden Linien sind Symmetrieaxen der Fläche. Die Fläche besteht also aus einfach unendlich vielen unter sich congruenten Flächenstücken, die unter einander längs der Y-Axe paralleler Graden zusammenhängen und von denen jedes mit jedem andern durch eine Drehung um eine dieser graden Linien um einen Winkel von 180^0 zur Deckung gebracht werden kann.

Die 3 Functionen U, V, W vermitteln bekanntlich eine conforme Abbildung der Minimalfläche auf die Ebene der complexen Zahl u. Dabei entsprechen der Schaar von algebraischen Curven auf der Fläche die Schaar grader Linien die der reellen Axe der Ebene der Zahl u parallel sind, der zu den algebraischen Curven orthogonalen Curvenschaar die zur imaginäre Axe parallelen Graden. Einem Rechtecke in der Ebene der Zahl u, entsprechend den Werten:

$$u = (2\mu + t)\omega_1 + (2\mu' + t')\omega_3$$

$(0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq t' \leqq 1$ μ und μ' beliebige ganze

Zahlen) entspricht bei dieser Abbildung die eine Hälfte eines der erwähnten unter sich congruenten Flächenstücke, in welche dieses durch die Ebene $y = 0$ geteilt wird. Dem Rechtecke

$$u = (2\mu - t)\omega_1 + (2\mu' + t')\omega_3$$

entspricht die andere Hälfte. Sämmtlichen Rechtecken, für welche μ' denselben Wert hat, entspricht dasselbe Flächenstück. Man kann sich also bei der weiteren Untersuchung auf solche Werte von u beschränken, für welche μ und μ' beide Null sind. Das diesen Werten entsprechende Flächenstück kann durch parallele Normale auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 conform abgebildet werden. Bildet man dann die Oberfläche dieser Kugel durch stereographische Projection auf ihre Aequatorialebene, die Ebene der complexen Größe s ab, so wird die Beziehung entsprechender Punkte dieser Ebene und der Punkte der Ebene der Zahl u hergestellt durch die Gleichung

$$s = \frac{k}{l}(pu - q).$$

Diese Function bildet nun die Rechtecke

$$u = \pm t\omega_1 + t'\omega_3$$
$$(0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq t' \leqq 1)$$

conform auf die einblättrigen Flächen zweier Halbebenen ab, deren gemeinschaftliche Begrenzung von der Axe des Reellen gebildet wird. Daher werden bei der Abbildung des betrachteten Flächenstücks auf die Oberfläche der Kugel vom Radius 1 durch parallele Normalen den auf beiden Seiten der Ebene $y = 0$ liegenden Hälften die Oberflächen der beiden durch die Ebene $Y = 0$ getrennten Halbkugeln entsprechen. Die Teile des betrachteten Flächenstücks, welche den Umgebungen der Stellen $u = 0$, $\pm\omega_1$ und ω_3 entsprechen, erstrecken sich ins Unendliche, der erste Teil so, daß er der Ebene $z = 0$ (wenn die Constante C_3 passend bestimmt wird) sich asymptotisch nähert. Die beiden andern Teile nähern sich asymptotisch zwei anderen zur Ebene $y = 0$ senkrechten Ebenen.

Giebt man der Größe t' einen constanten Wert, und läßt t innerhalb der Grenzen ± 1 veränderlich, so erhält man auf dem Flächenstück eine algebraische Raumcurve im allgemeinen von der sechsten Ordnung, [welche, wie man leicht erkennt, als teilweiser Durchschnitt zweier Flächen dritter Ordnung sich darstellen läßt]. Die Curven liegen, mit Ausnahme derer, für welche $t' = 0$ oder $= 1$ ist, die ja zu graden Linien ausarten, ganz im Endlichen,

Setzt man $t' = \frac{1}{2}$, so wird die zugehörige algebraische Raumcurve von der vierten Ordnung. Sie läßt sich als Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades darstellen.

Wählt man nun die Constanten der Functionen U, V, W so, daß die Discriminante

$$G < 0$$

wird, so erhält man eine Fläche, die im wesentlichen dieselben Eigenschaften hat, wie die eben untersuchten. Die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ sind jetzt conjugiert complex. Man setze deshalb [1])

$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_1, \; \omega_2' = \omega_3 - \omega_1.$$

Die Fläche hat die Ebene $y = 0$ zur Symmetrieebene. Die beiden Curven, in denen diese Ebene die Fläche schneidet entsprechen den Werten

$$\xi = 0, \; \xi = \omega_2.$$

Es sind ebene geodätische Linien der Flächen. Die Fläche enthält eine einfach unendlich große Zahl von graden Linien, deren Gleichungen sind

$$\begin{aligned} x &= 2\mu B_2 i\omega_2' - 2\mu i(a_1 + a_2 + a_3)\eta_2' \\ y &= 2\mu A_4 i\omega_2' - 2\mu i(c_2 + c_3)\eta_2', \end{aligned}$$

wenn μ alle positiven und negativen ganzzahligen Werte annimmt. Jede dieser Graden ist eine Symmetrieaxe der Fläche. Die Fläche besteht also aus einfach unendlich vielen congruenten Flächenstücken. Die zu beiden Seiten der Ebene $y = 0$ liegenden Hälften eines solchen Flächenstückes sind mittels der Functionen U, V, W auf die Flächen zweier Rechtecke abgebildet, welche in der Ebene der complexen Zahl u der Gesammtheit aller Werte

$$\begin{gathered} u = (2\mu \pm t)\omega_2 + (2\mu' + t')\omega_2' \\ (0 \leqq t \leqq 1, \; 0 \leqq t' \leqq 1) \end{gathered}$$

entsprechen. Durch parallele Normalen aber wird jede dieser Hälften auf die Oberfläche einer Halbkugel conform abgebildet, in welche die um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius 1 beschriebene Kugel durch die Ebene $Y = 0$ geteilt wird. Jedes der Flächenstücke hat aber noch eine weitere Symmetrie. Nimmt man z. B. $\mu = \mu' = 0$, setzt

$$\xi + \eta i = 2\omega_3 - (\xi' + \eta' i)$$

1) „Formeln". Art. 46. Nro. 1.

und nennt die zu $\xi' + \eta' i$ gehörigen Werte von $x\,y\,z$ resp. $x'\,y'\,z'$, so wird

$$\begin{aligned} x + x' &= 2B_2 i\,\omega_2' - 2i\,(a_1 + a_2 + a_3)\eta_2' = 2\alpha \\ y + y' &= 0 \\ z + z' &= 2A_4 i\,\omega_2' - 2i\,(c_2 + c_3)\eta_2' = 2\beta. \end{aligned}$$

Der Punkt

$$x = \alpha, \quad y = 0, \quad z = \beta$$

ist daher ein Symmetriepunkt des Flächenstücks, resp. die Linie $x = \alpha$, $z = \beta$ eine Symmetrieaxe desselben.

Jedes Flächenstück sendet Teile, welche den Umgebungen der Stellen $u = 0$, $u = \frac{1}{2}\,\omega_2 \pm \frac{1}{2}\,\omega_2'$ entsprechen, in's Unendliche.

Die Fläche enthält eine Schaar von algebraischen Curven sechster Ordnung und eine unendliche Zahl von Raumcurven vierter Ordnung. Die Curven sechster Ordnung liegen ganz im Endlichen, die Curven vierter Ordnung erstrecken sich in's Unendliche, da sie durch die Stellen der Fläche gehen, deren zugehörige Werte u dem Werte ω_3 congruent sind; sie sind Schnittcurven zweier Flächen zweiter Ordnung.

Nimmt man nun die in (63) angegebenen Werte von U, V, W und setzt deren reelle Bestandteile gleich den 3 rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so ist dies ein Punkt einer Minimalfläche, welche ganz ähnliche Eigenschaften hat, wie die eben untersuchten Flächen. Da die Invariante g_2 negativ sein muß, so sind die primitiven Perioden der Functionen $\wp u$ und $\wp' u$: $2\omega_2$ und $2\omega_3$ conjugirt complex. Man setze daher wieder

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_3 + \omega_1 \\ \omega_2' &= \omega_3 - \omega_1. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\xi = 0 \text{ oder } \xi = \omega_2,$$

so wird

$$y = 0; \; s = \sqrt{-\frac{12}{g_2}}\,\wp u \text{ wird reell.}$$

Die entsprechenden auf der Fläche liegenden transcendenten Curven sind also ebene geodätische Linien der Fläche, und die Ebene dieser Curven, die Ebene $y = 0$, ist eine Symmetrieebene der Fläche. Die Fläche enthält unendlich viele grade Linien, die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 2\mu\, i g_2\, \omega_2' \\ z &= 4\mu \sqrt{3 g_2}\, \eta_2' \end{aligned}$$

bestimmt sind. Sie entsprechen den Werten

$$\eta i = \mu \omega_2';$$

μ bedeutet eine beliebige ganze Zahl. Alle diese graden Linien sind Symmetrieaxen der Fläche, die demnach aus unendlich vielen congruenten Flächenstücken besteht, von denen jedes mit einem andern durch eine Drehung um eine der erwähnten graden Linien um einen Winkel von 180^0 zur Deckung gebracht werden kann. Jedes dieser Flächenstücke hat aber noch eine weitere Symmetrieaxe, die nicht auf der Fläche liegt und deren Gleichungen sind:

$$x = (2\mu + 1) i g_2 \omega_2'$$
$$z = 2(2\mu + 1) \sqrt{3 g_2}\, \eta_2'.$$

Durch die Functionen U, V, W werden die beiden symmetrischen zu beiden Seiten der Ebene $y = 0$ liegenden Hälften eines jeden Flächenstücks auf die einfach überdeckten Flächen der Rechtecke abgebildet, welche der Gesammtheit der Werte

$$u = (2\mu \pm t)\, \omega_2 + (2\mu' + t')\, v_2'$$

entsprechen. Den Stellen 0 und $\omega_2 \pm \omega_2'$ in diesen Rechtecken entsprechen unendlich ferne Teile des Flächenstücks. Die beiden Hälften des Flächenstücks werden durch parallele Normalen auf die Oberflächen der beiden Halbkugeln abgebildet, in welche die um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius 1 beschriebene Kugel durch die Ebene $Y = 0$ geteilt wird.

Auf jedem Flächenstück liegt eine Schaar algebraischer Curven sechster Ordnung. Man erhält deren Gleichungen, wenn man $t' =$ const setzt und t innerhalb der Grenzen ± 1 variiren läßt. Bei dieser Fläche erniedrigt sich der Grad von keiner der algebraischen Curven, mit Ausnahme natürlich der beiden Grenzfälle $t' = 0$ und $t' = 1$, wo die Curven in grade Linien ausarten.

§ 11. Daten zur Anfertigung von Modellen der bestimmten Flächen.

Um eine genauere Vorstellung von der Gestalt der untersuchten Minimalflächen und der auf ihnen liegenden algebraischen Curven zu erhalten, sollen nun für spezielle Wertsysteme der Constanten Modelle solcher Flächen berechnet werden.

Die erste Art der bestimmten Minimalflächen, definirt durch die Gleichungen (62) hängt ab von 3 Constanten g_2, g_3, p. Diese letztere Constante soll nun den Wert

$$p = e_2$$

erhalten. Man erhält dann den speciellen Fall, der schon bei der Bestimmung von G und H hervortrat. Für ihn sind nämlich G und H eindeutige doppeltperiodische Functionen. Wenn $p = e_2$ gewählt wird, muß $g_2 < 0$ sein, damit man für $\frac{k^2}{l^2}$ einen reellen positiven Wert erhält. Die Größe g_3 werde gleich Null gesetzt. Man erhält dann eine Fläche, die in der Art, wie es früher (Seite 32) angegeben wurde, auf sich selbst verbiegbar ist. Die Wahl der Größe g_2 hat, vorausgesetzt daß sie als reell negativ und von Null verschieden angenommen wird, auf die Gestalt der Fläche keinen Einfluß, sondern nur auf ihre Dimensionen. Die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ sind conjugirt complex und es wird

$$\omega_2 i = \omega_2'$$

$e_2 = 0, \ e_1 = -e_3 = \beta i,$ wo β eine reelle Zahl bedeutet. Die Coefficienten in den Functionen U, V, W werden

$$\begin{aligned} B_2 &= 0, \ a_1 = 2e_1^2, \ a_2 = 4e_1^2, \qquad a_3 = 4e_1^2 \\ & \qquad b_1 = 2e_1^2, \ b_2 = -2e_1^2, \qquad b_3 = -4e_1^2 \\ A_4 &= \sqrt{-3}\cdot 8e_1^2, \quad c_2 = -\sqrt{-3}\cdot 2e_1^2, \ c_3 = \sqrt{-3}\cdot 2e_1^2. \end{aligned}$$

Es ist nur nötig, die Coordinaten einer Anzahl von Punkten der Minimalfläche zu berechnen, welche einer der zur Ebene $y = 0$ symmetrischen Hälften eines der Flächenstücke angehören, aus denen die ganze Minimalfläche besteht, d. h. man kann bei der Berechnung sich auf solche Werte von u beschränken, denen bei der geometrischen Darstellung der Variabeln u Punkte innerhalb und auf dem Rande eines Quadrates mit den Ecken, 0, ω_2, ω_2', $\omega_2 + \omega_2'$ entsprechen.

Teilt man dieses Quadrat durch eine Anzahl von Graden, die den Seiten des Quadrats parallel sind, in kleinere Quadrate, so entsprechen den parallelen graden Linien auf der Minimalfläche eine Anzahl von algebraischen Curven und zu diesen orthogonalen Curven; diese teilen das Flächenstück in krummlinige Vierecke, die bei der conformen Abbildung der Minimalfläche auf die Ebene der Veränderlichen u jenen kleinen Quadraten entsprechen, die deshalb Quadraten möglichst nahe kommen. Die Coordinaten für die Eckpunkte solcher Vierecke sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Zur Berechnung derselben ist

$$\omega_2 = 1, \ \omega_2' = i$$

gesetzt. Man erhält dann[1])

$$\eta_2 = i\eta_2' = 1{,}57080$$
$$e_1 = -e_3 = \beta i = 3{,}43887\,i.$$

Das Quadrat mit den Ecken 0, ω_2, $\omega_2+\omega_2'$, ω_2' ist in 64 kleinere Quadrate in der oben angegebenen Weise geteilt und für die Werte von u, welche den Ecken dieser Quadrate entsprechen, sind die Coordinaten x, y, z berechnet. ξ und η haben ihre frühere Bedeutung, nämlich $u = \xi + \eta i$. Die Berechnung ist auf 4 Decimalstellen abgerundet.

8ξ	$\eta = 0$			$\eta = \frac{1}{8}$		
	x	y	z	x	y	z
0	0	∞	0	32,1044	0	5,9504
1	0	31,9568	0	15,7424	16,1096	5,9670
2	0	15,5644	0	5,0044	12,7052	5,7528
3	0	9,2776	0	0,5516	8,5002	4,9031
4	0	5,2440	0	—2,1120	4,6468	2,9781
5	0	2,4028	0	—1,6712	2,1498	1,0532
6	0	0,7360	0	—0,9884	0,1664	0,2035
7	0	0,0800	0	—0,1832	—0,1840	—0,0108
8	0	0	0	+0,0676	0	+0,0060

8ξ	$\eta = \frac{1}{4}$			$\eta = \frac{3}{8}$		
	x	y	z	x	y	z
0	17,0158	0	11,8032	13,9396	0	16,9830
1	13,0256	6,9746	12,0887	12,1344	4,2866	18,1576
2	5,7984	7,9520	12,3788	6,9492	7,9717	20,0816
3	—1,8324	7,5288	11,1463	—4,7760	10,0008	22,6572
4	—6,8580	3,3752	5,9564	—22,5996	1,7160	8,9344
5	—5,0364	—0,4676	0,7664	—8,2272	—6,4212	—4,8575
6	—1,6176	—1,5360	—0,4661	—0,1120	—4,6674	—2,2127
7	0,1640	—1,0018	—0,1589	1,4844	—2,0638	—0,2889
8	0,7184	0	+0,1103	2,2592	0	+0,8860

1) „Formeln". Art. 46.

8ξ	$\eta = \frac{1}{2}$			$\eta = \frac{5}{8}$		
	x	y	z	x	y	z
0	14,6688	0	21,1688	16,5904	0	22,9392
1	14,0716	3,4374	22,0282	17,3652	2,0638	24,1141
2	12,8000	7,4142	26,0291	18,9616	4,6674	26,0379
3	11,1408	15,9384	39,6572	27,0768	6,4212	28,6828
4	— ∞	0	11,9126	41,5492	—1,7160	14,8908
5	+7,7088	—15,9384	—15,8322	23,6256	—9,8724	1,0986
6	+6,0496	—7,4142	—2,2039	11,9004	—7,9717	3,7436
7	4,7780	—3,4374	+1,7970	6,7152	—4,2866	5,6676
8	4,1808	0	+2,6564	4,9100	0	6,8422

8ξ	$\eta = \frac{3}{4}$			$\eta = \frac{7}{8}$		
	x	y	z	x	y	z
0	18,1312	0	23,7149	18,7820	0	23,8192
1	18,6956	1,0018	23,9841	19,0328	0,1840	23,8360
2	20,4672	1,5360	24,2913	19,8380	—0,1664	23,6217
3	23,8860	0,4676	22,8765	20,5208	—2,1498	22,7719
4	25,6876	—3,3752	17,8689	20,9616	—4,6468	20,8470
5	20,6820	—7,5288	12,6789	18,2980	—8,5002	18,9220
6	13,0512	—7,9520	11,4464	13,8452	—12,7052	18,0724
7	5,8240	—6,9746	11,7365	3,1072	—16,1096	17,8582
8	1,8308	0	12,0229	—13,2548	0	17,8748

8ξ	$\eta = 1$		
	x	y	z
0	18,8496	0	23,8252
1	18,8496	—0,0800	23,8252
2	18,8496	—0,7360	23,8252
3	18,8496	—2,4028	23,8252
4	18,8496	—5,2440	23,8252
5	18,8496	—9,2776	23,8252
6	18,8496	—15,5644	23,8252
7	18,8496	—31,9568	23,8252
8	18,8496	∞	23,8252

Die zweite Art der hier bestimmten Minimalflächen hängt ab von 2 Constanten g_2 und g_3. Auch hier soll diejenige Fläche berechnet werden, für welche $g_3 = 0$ ist, welche also die Eigenschaft hat, in der Seite 32 angegebenen Weise auf sich selbst verbiegbar zu sein. g_2 muß auch hier negativ sein, sein absoluter Betrag ist von keinem Einfluß auf die Gestalt der Fläche. Es wird

$$\omega_2 i = \omega_2'$$
$$e_2 = 0, \; e_1 = -e_3 = \beta i.$$

Die Berechnung der Coordinaten wird in genau derselben Art ausgeführt, wie bei der vorher berechneten Fläche.

Es wird gesetzt

$$\omega_2 = 8,\ \omega_2' = 8i,$$

also

$$\eta_2 = i\eta_2' = 0{,}19635$$
$$e_1 = -e_3 = i\beta = 0{,}05371\,i$$
$$g_2 = -0{,}01154.$$

Die Werte der Coordinaten in folgender Tabelle sind auf 4 Decimalen abgerundet.

ξ	$\eta = 0$			$\eta = 1$		
	x	y	z	x	y	z
0	0	∞	0	4,0254	0	+0,7444
1	0	—4,0023	0	—0,7346	+0,7576	+0,2754
2	0	—0,5046	0	—0,3267	—0,0709	+0,1473
3	0	—0,1747	0	—0,0790	—0,0789	+0,0707
4	0	—0,0742	0	—0,0143	—0,0510	+0,0373
5	0	—0,0373	0	+0,0050	—0,0319	+0,0190
6	0	—0,0237	0	+0,0107	—0,0223	+0,0079
7	0	—0,0116	0	+0,0116	—0,0115	+0,0013
8	0	0	0	+0,0115	0	—0,0007

ξ	$\eta = 2$			$\eta = 3$		
	x	y	z	x	y	z
0	+0,5507	0	+0,3733	+0,2239	0	+0,2519
1	+0,1148	+0,3497	+0,2980	+0,1482	+0,1021	+0,2259
2	—0,0740	+0,1202	+0,1838	+0,0606	+0,0793	+0,1705
3	—0,0331	+0,0096	+0,1078	+0,0405	+0,0287	+0,1161
4	+0,0049	—0,0188	+0,0618	+0,0463	—0,0025	+0,0717
5	+0,0205	—0,0220	+0,0318	+0,0496	—0,0196	+0,0341
6	+0,0255	—0,0206	+0,0113	+0,0453	—0,0256	+0,0056
7	+0,0238	—0,0123	—0,0014	+0,0373	—0,0181	—0,0129
8	+0,0224	0	—0,0057	+0,0319	0	—0,0197

ξ	η = 4			η = 5		
	x	y	z	x	y	z
0	+0,1627	0	+0,1950	+0,1527	0	+0,1658
1	+0,1433	+0,0374	+0,1826	+0,1473	+0,0181	+0,1591
2	+0,1111	+0,0412	+0,1391	+0,1393	+0,0256	+0,1406
3	+0,0948	+0,0229	+0,1130	+0,1309	+0,0196	+0,1120
4	+0,0925	0	+0,0731	+0,1383	+0,0025	+0,0745
5	+0,0898	—0,0229	+0,0331	+0,1441	—0,0287	+0,0300
6	+0,0735	—0,0412	+0,0070	+0,1240	—0,0793	—0,0244
7	+0,0413	—0,0374	—0,0365	+0,0365	—0,1021	—0,0797
8	+0,0219	0	—0,0489	—0,0393	0	—0,1058

ξ	η = 6			η = 7		
	x	y	z	x	y	z
0	+0,1622	0	+0,1519	+0,1731	0	+0,1468
1	+0,1608	+0,0123	+0,1475	+0,1730	+0,0115	+0,1448
2	+0,1593	+0,0206	+0,1349	+0,1739	+0,0223	+0,1383
3	+0,1641	+0,0220	+0,1144	+0,1797	+0,0319	+0,1271
4	+0,1797	+0,0188	+0,0843	+0,1989	+0,0510	+0,1089
5	+0 2178	—0,0096	+0,0383	+0,2636	+0,0789	+0,0754
6	+0,2587	—0,1202	—0,0376	+0,5113	+0,0709	—0,0011
7	+0,0698	—0,3497	—0,1518	+0,9192	—0,7576	—0,1292
8	—0,3661	0	—0,2271	—3,8407	0	—0,5982

ξ	η = 8		
	x	y	z
0	+0,1846	0	+0,1461
1	+0,1846	+0,0116	+0,1461
2	+0,1846	+0,0237	+0,1461
3	+0,1846	+0,0373	+0,1461
4	+0,1846	+0,0704	+0,1461
5	+0,1846	+0,1547	+0,1461
6	+0,1846	+0,5046	+0,1461
7	+0,1846	+4,0023	+0,1461
8	+0,1846	∞	+0,1461

Vita.

Am 7. Februar 1860 bin ich als Sohn des Wagnermeisters J. F. Götting zu Eschwege, in der Provinz Hessen-Nassau geboren. Meine Confession ist die reformirte. Vorgebildet in der Bürgerschule meiner Vaterstadt, besuchte ich das dortige Progymnasium und darauf das Gymnasium zu Hersfeld, wo ich Ostern 1880 das Zeugnis der Reife erhielt.

Um Mathematik und Naturwissenschaften zu studiren, bezog ich die Universitäten Berlin und Göttingen, und hörte die Vorlesungen der Herren Professoren: Baumann, Bruns, Ehlers, Eichler, C. Klein, Kummer, Lotze, Riecke, K. Schering, H. A. Schwarz, Solms-Laubach, Stern. 4 Semester war ich Mitglied des math.-phys. Seminars zu Göttingen und 3 Semester lang nahm ich an dem mathematischen Colloquium des Herrn Prof. H. A. Schwarz Teil. Wenn ich allen den erwähnten Herren zum größten Danke mich verpflichtet fühle, so bin ich es doch vor allem Herrn Prof. H. A. Schwarz für die große Anregung, die ich durch ihn während meiner Studienzeit und später erhielt.

Im August 1884 bestand ich in Göttingen das Examen pro facultate docendi, absolvirte daselbst am königlichen Gymnasium mein Probejahr und, nachdem ich hier noch 2 Jahre als wissenschaftlicher Hilfslehrer beschäftigt worden war, wurde ich am 1. August d. J. zum ordentlichen Lehrer an der erwähnten Anstalt ernannt.

